WS 2020/21

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (a) Betrachte die 2-Sphäre S^2 (ohne den Nullmeridian) mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x}(\theta,\varphi)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta).$$

In der Vorlesung hatten wir ausgerechnet, daß die Koeffizienten des metrischen Tensors gegeben sind durch

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2\theta\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Einträge g^{ij} der inversen Matrix, die Koeffizienten L_{ij} der zweiten Fundamentalform und die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k. Begründen Sie geometrisch, warum keine dieser Größen von φ abhängt.

(b) Betrachte eine Rotationsfläche wie in Aufgabe 3 von Übungsblatt 4. Zeigen Sie:

(i) Die Matrix (L_{ij}), die die zweite Fundamentalform beschreibt, ist gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{\dot r^2+\dot z^2}}\begin{pmatrix}\dot r\ddot z-\dot z\ddot r & 0\\ 0 & r\dot z\end{pmatrix}.$$

(ii) Es gilt $\det(L_{ij})=0$ genau dann, wenn jeder Meridian eine Gerade ist.

Aufgabe 2. (a) Sei M eine Fläche und Π eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die M in einer Kurve $\boldsymbol{\gamma}$ schneidet. Zeigen Sie, daß $\boldsymbol{\gamma}$ eine Geodätische ist, falls Π eine Symmetrieebene von M ist. (Sie können mittels der Eindeutigkeit von Geodätischen bei gegebenen Anfangsbedingungen argumentieren, es geht aber auch ohne diese Information.)

(b) Zeigen Sie, daß jede Gerade im $\mathbb{R}^3$, die in einer Fläche enthalten ist, auf dieser Fläche eine Geodätische ist.

Aufgabe 3. (a) Sei M die Fläche $\{x^2+y^2-z^2=1\}$. Finden Sie möglichst viele (explizite) Geodätische auf M.

(b) Finden Sie möglichst viele Geodätische in dem Flächenstück

$$\mathbb{R}^2\ni(u,v)\longmapsto\mathbf{x}(u,v)=(u,v,u^2-v^2)\in\mathbb{R}^3.$$

b.w.

Aufgabe 4. Sei $f\colon V \to U$ eine Koordinatentransformation. Mit L_{ij}, Γ_{ij}^k seien die zweite Fundamentalform bzw. die Christoffelsymbole des Flächenstücks $\mathbf{x}\colon U \to \mathbb{R}^3$ bezeichnet, mit $\overline{L}_{\alpha\beta}, \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ die entsprechenden Größen für $\mathbf{y}\colon V \to \mathbb{R}^3$, wobei $\mathbf{y} = \mathbf{x} \circ f$. Zeigen Sie:

(a) Bis auf das Vorzeichen von $\det\left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}\right)$ transformiert sich L_{ij} wie g_{ij}:

$$L_{ij} = \pm \overline{L}_{\alpha\beta} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^j}$$

(b) Die Christoffelsymbole transformieren sich wie folgt:

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} + \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \right) \frac{\partial v^\gamma}{\partial u^k}.$$

Abgabe: Dienstag, 8.12.20

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs