WS 2020/21

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Seien $h_i^\pm$ die im Skript definierten Karten für $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, d.h.

$$\begin{array}{cccc} h_i^\pm & : & U_i^\pm & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \end{array}$$

wobei $U_i^\pm = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : \pm x_i > 0\}$. Sei $h^\pm$ die stereographische Projektion vom Nord- bzw. Südpol auf die Äquatorebene, d.h. für $p \in S^n$, $p \neq (0, \dots, 0, 1) = N$ ("Nordpol"), ist $h^+(p)$ definiert als der Schnittpunkt der Geraden durch N und p mit der "Äquatorebene" $\{x_{n+1} = 0\}$; analog für h^-. Setze $U^+ := S^n \setminus \{N\}$. Analog bezeichne U^- die n–Sphäre ohne den "Südpol".

(a) Zeigen Sie:
$$h^+(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n, 0)$$
Wie sieht die entsprechende Formel für h^- aus?

(b) Die Karten $(U^\pm, h^\pm)$ definieren einen differenzierbaren Atlas für S^n.

(c) Die Atlanten $\{(U_i^\pm, h_i^\pm), i = 1, \dots, n+1\}$ und $\{(U^\pm, h^\pm)\}$ definieren die gleiche differenzierbare Struktur auf S^n.

(d) Gibt es auch einen Atlas von S^n mit nur einer Karte? (Hinweis: Was weiß man über das Bild kompakter Mengen unter einer stetigen Abbildung?)

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Es bezeichne $[x] \in X/\sim$ die Äquivalenzklasse von $x \in X$ im Quotientenraum $X/\sim$ aller solcher Äquivalenzklassen. Mit $\pi\colon X \to X/\sim$ sei die Quotientenabbildung $x \mapsto [x]$ bezeichnet. Eine Teilmenge $U \subset X/\sim$ heißt **offen in der Quotiententopologie** genau dann, falls $\pi^{-1}(U)$ offen ist in X.

(a) Dies definiert in der Tat eine Topologie auf $X/\sim$.

(b) Dies ist die feinste Topologie auf $X/\sim$ (d.h. die Topologie mit den meisten offenen Mengen), für die π stetig ist.

Zur Erinnerung: Eine Abbildung $f\colon X \to X'$ zwischen topologischen Räumen $(X, \mathcal{O})$ und $(X', \mathcal{O}')$ heißt **stetig**, falls $f^{-1}(U') \in \mathcal{O}$ für alle $U' \in \mathcal{O}'$.

Aufgabe 3. Man versehe die Oberfläche des Würfels

$$\left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n+1}|\} = 1\right\}$$

mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

(a) Die Exponentialabbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{S}^1 \subset \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t \end{array}$$

ist, bezüglich der Beschreibung von S^1 als differenzierbare Mannigfaltigkeit wie in der Vorlesung, ein lokaler Diffeomorphismus.

(b) $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ ist diffeomorph zu S^1.

Abgabe: Dienstag, 2.2.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs