WS 2020/21

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.
Laura Jaust, M.Sc.

# Elementare Differentialgeometrie

Übungsblatt 12

**Aufgabe 1.** Wegen Anregungen (v), (vi) auf dem Lernmaterial für KW 05 induziert eine Karte $(U, h)$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $M$ einen Vektorraumisomorphismus

$$T_p h\colon\; T_p M \longrightarrow T_{h(p)}\mathbb{R}^m$$

für jedes $p \in U$. Seien $u^1, ..., u^m$ cartesische Koordinaten auf dem $\mathbb{R}^m$. Schreibe

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p := T_{h(p)} h^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial u^i}|_{h(p)}\right), \quad p \in U.$$

(a) Zeigen Sie mittels der Definition des Differentials, daß dies konkret folgendes bedeutet: $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \in T_p M$ ist der Tangentialvektor, der angewandt auf $\varphi \in C^\infty(M)$ das folgende liefert:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p (\varphi) = \frac{\partial(\varphi \circ h^{-1})}{\partial u^i}(h(p)).$$

(b) Sei $\varphi\colon\; \mathrm{S}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(x, y, z) = x^2 + z$ und sei $p = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \in \mathrm{S}^2$. Sei $(U, h)$ die Karte, mit $U = \{z > 0\} \cap \mathrm{S}^2$ und $h(x, y, z) = (x, y)$. Zeigen Sie, daß die partiellen Ableitungen von $\varphi$ im Punkt $p$ gegeben sind durch $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p (\varphi) = \sqrt{2} - 1$ und $\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p (\varphi) = 0$. Sei nun $(V, k)$ die Karte, die durch $V = \{x > 0\} \cap \mathrm{S}^2$ und $k(x, y, z) = (y, z)$ gegeben ist. Zeigen Sie, daß bezüglich dieser Karte für die Ableitungen im Punkt $p$ gilt $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p (\varphi) = 0$ und $\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p (\varphi) = 1 - \sqrt{2}$.

**Aufgabe 2.** Seien

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q$$

differenzierbare Abbildungen zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Beweisen Sie für $p \in M$ die Kettenregel

$$T_p\,(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f.$$

b.w.

**Aufgabe 3.** Zeigen sie die folgenden Eigenschaften der Lie-Klammer:

(i) $[X, Y] = -[Y, X]$

(ii) $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$

(iii) Jacobi-Identität: $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Sei $(U, h)$ eine Karte von $M$ und $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$ die entsprechende Basis von $T_pM$ für $p \in M$. Dann gilt

(iv) $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$

(v) Für $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ mit $X^i, Y^j \in C^\infty(U)$ ist $[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j}$

Mittels der lokalen Darstellung in (v) sieht man nochmals, daß $[X, Y]$ tatsächlich ein differenzierbares Vektorfeld ist.

**Aufgabe 4.** Seien $X = \partial_x$ und $Y = x\partial_y$ Vektorfelder auf $M = \mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie den Fluß $\phi_t$ und $\psi_t$ von $X$ bzw. $Y$.

(b) Für $p \in M$ setze

$$\beta_p(t) = \psi_{-\sqrt{t}}\, \phi_{-\sqrt{t}}\, \psi_{\sqrt{t}}\, \phi_{\sqrt{t}}\, (p).$$

Verifizieren Sie, daß für $\varphi \in C^\infty(M)$ gilt

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(\beta_p(t)) - \varphi(\beta_p(0))}{t} = [X, Y]_p\, \varphi.$$

**Bemerkung.** Diese Identität gilt für beliebige $M, X, Y$ und stellt eine wichtige geometrische Interpretation der Lie-Klammer dar.

Abgabe: Dienstag, 9.2.21

bis spätestens 12:00 Uhr im ILIAS-Kurs