WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A \in \mathcal{O}$.

(a) Zeigen Sie: Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von topologischen Räumen ist stetig genau dann, wenn das Urbild $f^{-1}(B)$ jeder abgeschlossenen Menge $B \subset Y$ wieder abgeschlossen ist.

(b) Die **Relativtopologie** oder **induzierte Topologie** $\mathcal{O}_V$ einer Teilmenge $V \subset X$ ist definiert wie folgt:

Für $U \subset V$ gilt $U \in \mathcal{O}_V$ genau dann, falls eine Teilmenge $\widetilde{U} \subset X$, $\widetilde{U} \in \mathcal{O}$ existiert mit $U = \widetilde{U} \cap V$.

Zeigen Sie: Falls $A \subset X$ abgeschlossen ist und $B \subset A$ ist abgeschlossen in der Relativtopologie von A in X, so ist B abgeschlossen in X.

(c) Sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Abbildung und $X = \cup_{i=1}^{n} A_i$ mit $A_i \subset X$ abgeschlossen.

Zeigen Sie: Falls $f|_{A_i}\colon A_i \to Y$ stetig ist für jedes $i = 1, \ldots, n$, dann ist auch f stetig.

Aussage (c) wird in der Vorlesung im Beweis von Lemma 2.1 verwendet.

Aufgabe 2. (a) Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ der 'Kamm mit unendlich vielen Zinken'

$$X = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

mit der vom $\mathbb{R}^2$ induzierten Topologie. Zeigen Sie: Der einpunktige Unterraum von X bestehend aus dem Punkt $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$ ist Deformationsretrakt von X, aber nicht starker Deformationsretrakt.

(b) Zeigen Sie, daß für $p = [0 : \ldots : 0 : 1] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ das Komplement $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus \{p\}$ einen $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ als starken Deformationsretrakt besitzt. Gilt das auch, wenn man den Punkt $p \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ beliebig wählt?

Der **komplex projektive Raum** $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist definiert als der Raum der komplexen Ursprungsgeraden im $\mathbb{C}^{n+1}$, oder gleichbedeutend als der Quotientenraum von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ unter der Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\colon\ y = \lambda x.$$

Den gleichen Quotientenraum erhält man, wenn man diese Äquivalenzrelation nur auf der Einheitssphäre $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ (und mit $|\lambda| = 1$) betrachtet. Wie im reellen Fall (Übungsblatt 1) bezeichnet man die Äquivalenzklasse eines Punktes $(x_0, \ldots, x_n)$ mit **homogenen Koordinaten** $[x_0 : \ldots : x_n]$.

b.w.

Die **Ein-Punkt-Kompaktifizierung** $\widehat{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{C}$ ist definiert als die Menge $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (d.h. die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{C}$ und einer Menge mit genau einem Element, das wir mit ∞ bezeichnen), mit der folgenden Topologie: Die offenen Mengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ seien genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ und die Mengen der Form $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ mit kompaktem $K \subset \mathbb{C}$.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, daß $\widehat{\mathbb{C}}$ tatsächlich ein kompakter topologischer Raum ist. Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. falls für jedes System von offenen Mengen $\{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ (mit A einer beliebigen Indexmenge), das $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ erfüllt, eine Auswahl von endlich vielen Mengen $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ existiert mit $X = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{CP}^1 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ [z_0 : z_1] &\longmapsto \begin{cases} z_1/z_0, & \text{falls } z_0 \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } z_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ist.

Die **stereographische Projektion** Φ von $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ vom Nordpol $N = (0,0,1)$ auf die Äquatorebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ist definiert wie folgt: Zu einem Punkt $p \in S^2 \setminus \{N\}$ betrachte die Gerade durch p und N. Definiere $\Phi(p)$ als den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Äquatorebene.

Aufgabe 4. Die kartesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^3$ seien mit (x, y, z) bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, daß für $(x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$ gilt:

$$\Phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} S^2 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ (x, y, z) &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{x + \mathrm{i}y}{1-z} & \text{für } z \neq 1 \\ \infty & \text{für } z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ist.

Abgabe: Montag, 25.10.21
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs