WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, falls es zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$ einen Weg $u\colon [0,1] \to X$ gibt mit $u(0) = x_0$ und $u(1) = x_1$. Mit $\pi_0(X)$ wird die Menge der Wegkomponenten bezeichnet, d.h. der Quotientenraum von X bezüglich der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \text{ Weg von } x \text{ nach } y.$$

Schreibe $[x]$ für die Äquivalenzklasse von x. Zeigen Sie:

(a) Jeder zusammenziehbare Raum X ist einfach zusammenhängend, d.h. X ist wegzusammenhängend und es gilt $\pi_1(X) = \{e\}$.

(b) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist durch $f_*[x] := [f(x)]$ eine wohldefinierte Abbildung $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ gegeben.

(c) Ist $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ eine Bijektion.

(d) Die Menge $\pi_0(X)$ läßt sich auffassen als die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $S^0 = \{-1, 1\} \to X$, die den Punkt $-1 \in S^0$ auf einen fest gewählten Basispunkt x_0 abbilden.

Aufgabe 2. Es seien $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen, die homotop vermöge einer Homotopie $F\colon X \times I \to Y$ sind, d.h. $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$. Sei $x_0 \in X$. Setze $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = g(x_0)$. Dann ist $u(t) := F(x_0, t)$ ein Weg von y_0 nach y_1.

Wir betrachten die induzierten Homomorphismen

$$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad \text{und} \quad g_*\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_1).$$

Zeigen Sie durch Inspektion des Beweises von Satz 2.10 der Vorlesung, daß $f_* = u_\#^{-1} \circ g_*$ gilt.

Dies wurde im Beweis von Satz 2.15 verwendet.

Aufgabe 3. Man fasse S^1 als den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ auf. Beschreiben Sie den Homomorphismus $f_*\colon \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, f(1))$, wenn

(i) $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta + \pi/2)}$,

(ii) $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ für $n \in \mathbb{Z}$,

(iii) $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi - \theta)}, & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum und $f\colon S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Definiere

$$X \cup_f D^2 = (X + D^2)/x \sim f(x) \text{ für } x \in S^1 = \partial D^2.$$

Hier bezeichnet $X + D^2$ die sogenannte **topologische Summe** von X und D^2, d.h. die disjunkte Vereinigung mit der offensichtlichen Topologie. Man sagt, $X \cup_f D^2$ ist der Raum, der aus X durch 'Anheften' einer 2-Scheibe D^2 längs ihres Randes entsteht. (Malen Sie ein schematisches Bild für diese Anheftung.)

(a) Zeigen Sie: Falls $f, g\colon S^1 \to X$ homotope Abbildungen sind, so gilt

$$X \cup_f D^2 \simeq X \cup_g D^2.$$

(b) Die Narrenkappe ist der topologische Raum, den man aus einem gleichseitigen Dreieck erhält, indem man die drei Seiten wie in Abbildung 1 angegeben identifiziert. Beschreiben Sie die Narrenkappe in der Form $S^1 \cup_f D^2$ mit einer geeigneten Abbildung $f\colon S^1 \to S^1$ und zeigen Sie mit (a), daß die Narrenkappe zusammenziehbar ist.

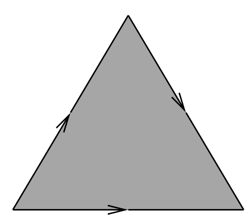

Abbildung 1: Die Narrenkappe.

Abgabe: Montag, 1.11.21
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs