WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (a) Seien N und S die Pole (d.h. zwei fest gewählte Antipodenpunkte) der n-Sphäre S^n, $n \geq 2$. Zeigen Sie mittels des Lebesgueschen Überdeckungssatzes, daß jeder Weg in S^n ein endliches Produkt von Wegen ist, die ganz in $S^n \setminus \{N\}$ oder $S^n \setminus \{S\}$ liegen. Schließen Sie daraus, daß $\pi_1(S^n)$ die triviale Gruppe ist, indem Sie jede Schleife in S^n (an einem gewählten Basispunkt verschieden von N und S) als Komposition von Schleifen schreiben, die jeweils ganz in $S^n \setminus \{N\}$ oder $S^n \setminus \{S\}$ liegen.

(b) Zeigen Sie durch Anheben von Wegen in $\mathbb{RP}^n = S^n/x \sim -x$ nach S^n und mit (a), daß $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}_2$ für $n \geq 2$. Was ist $\pi_1(\mathbb{RP}^1)$?

Aufgabe 2. Eine **topologische Gruppe** ist ein topologischer Raum G mit einer Gruppenstruktur, so daß die Multiplikation $\mu\colon G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$, und die Invertierungsabbildung $\iota\colon G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$, stetig sind.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathrm{GL}^+(n)$, die Menge der reellen $(n \times n)$-Matrizen mit positiver Determinante, eine wegzusammenhängende topologische Gruppe ist (bzgl. der Matrixmultiplikation als Gruppenverknüpfung).

(b) Seien u und v Schleifen in einer topologischen Gruppe G mit Basispunkt e, dem Einselement von G. Sei $u * v$ die durch $u * v(s) = \mu(u(s), v(s))$, $s \in [0,1]$, definierte Schleife. Zeigen Sie, daß

$$uv \simeq u * v \simeq vu \ \text{ rel } \{0,1\},$$

und folgern Sie daraus, daß $\pi_1(G,e)$ abelsch ist.

Aufgabe 3. (Lemma 3.1) Rechnen Sie explizit nach, daß

$$\partial_{n-1}(\partial_n(T)) = 0$$

für jeden singulären n-Quader $T\colon I^n \to X$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie außerdem, daß

$$\partial_n(D_n(X)) \subset D_{n-1}(X) \ \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 4. (a) Es sei

$$0 \to \mathbb{Z}_3 \to G \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \to 0$$

eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen und Homomorphismen. Zeigen Sie, daß α ein Isomorphismus ist und G isomorph zu $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6$.

(b) Eine **kurze exakte Sequenz** abelscher Gruppen ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0.$$

Zeigen Sie:

(i) Exaktheit bei A bzw. C ist äquivalent zur Injektivität von α bzw. Surjektivität von β.

(ii) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- Es gibt einen Homomorphismus $\lambda\colon C \to B$, so daß $\beta \circ \lambda = \mathrm{id}_C$.
- Es gibt einen Homomorphismus $\mu\colon B \to A$, so daß $\mu \circ \alpha = \mathrm{id}_A$.

Unter diesen Bedingungen sagt man, daß die kurze exakte Sequenz **spaltet**. Zeigen Sie weiter, daß dann $B \cong A \oplus C$.

(iii) Ist C eine *freie* abelsche Gruppe, so spaltet jede kurze exakte Sequenz der obigen Form. (Falls Ihnen der allgemeine Fall Schwierigkeiten bereitet, diskutieren Sie zumindest den Fall $C \cong \mathbb{Z}$.)

(c) Beachten Sie, daß eine spaltende kurze exakte Sequenz *nicht-abelscher* Gruppen A, B, C im allgemeinen einem sogenannten *semi-direkten* Produkt von A und C entspricht. Als Beispiel betrachten wir die **Diedergruppe** D_{2n}, d.h. die Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks. Wir verwenden die Notation C_k für die multiplikativ geschriebene zyklische Gruppe der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) D_{2n} wird erzeugt von der Rotation r um $2\pi/n$ und einer Spiegelung s an einer Symmetrieachse in der Ebene des n-Ecks. Weiter besteht D_{2n} genau aus den $2n$ Elementen

$$e, r, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s.$$

(ii) Es gilt $sr = r^{-1}s$, wobei $r^{-1} = r^{n-1}$.

(iii) Durch $r^i s^j \mapsto s^j$ ist ein wohldefinierter Homomorphismus $D_{2n} \to C_2$ beschrieben.

(iv) Es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$\{e\} \longrightarrow C_n \longrightarrow D_{2n} \longrightarrow C_2 \longrightarrow \{e\},$$

die spaltet.

Abgabe: Montag, 8.11.21
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs