WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. In der Vorlesung haben wir konkret die Kettenkomplexe der singulären Ketten in einem topologischen Raum betrachtet, aber es handelt sich hier um rein algebraische Konzepte. Seien also C, C' zwei **Kettenkomplexe**, d.h. $C = \{(C_n, \partial_n) \colon n \in \mathbb{N}_0\}$ ist eine Folge von freien abelschen Gruppen C_n und Homomorphismen $\partial_n \colon C_n \to C_{n-1}$,

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

so daß $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und analog für $C' = \{(C'_n, \partial'_n)\}$. Man kann dan die Homologie eines solchen Kettenkomplexes definieren durch $H_n(C) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$. Wo notwendig, setzen wir $C_k = 0$ für $k < 0$.

Eine Folge f von Homomorphismen $f_n \colon C_n \to C'_n$ heißt **Kettenabbildung**, falls $\partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Eine solche Kettenabbildung induziert eine Folge f_* von Homomorphismen $f_*^{(n)} \colon H_n(C) \to H_n(C')$.

Wie in Lemma 4.4 der Vorlesung nennen wir zwei solche Kettenabbildungen f, g **kettenhomotop**, falls es eine Folge von Homomorphismen $\varphi_n \colon C_n \to C'_{n+1}$ für $n \geq -1$ gibt, so daß

$$g_n - f_n = \partial'_{n+1} \circ \varphi_n + \varphi_{n-1} \circ \partial_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

siehe dazu das Diagramm im Skript auf Seite 49. Mit dem dortigen Argument sieht man, daß dann $f_* = g_*$.

(a) Zeigen Sie, daß die Eigenschaft, kettenhomotop zu sein, eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kettenabbildungen $C \to C'$ definiert.

(b) Zwei Kettenkomplexe C, C' heißen **kettenäquivalent**, falls es Kettenabbildungen $f \colon C \to C'$ und $g \colon C' \to C$ gibt, so daß $g \circ f$ und $f \circ g$ kettenhomotop zu id_C bzw. $\mathrm{id}_{C'}$ sind; die Kettenabbildungen f, g heißen dann **Kettenäquivalenzen**. Zeigen Sie, daß die Eigenschaft, kettenäquivalent zu sein, eine Äquivalenzrelation auf jeder gegebenen Menge von Kettenkomplexen definiert.

Aufgabe 2. Sei (X, A) ein Raumpaar und $r \colon X \to A$ eine Retraktion. Zeigen Sie den Isomorphismus

$$H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X, A) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

b.w.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum. Betrachte den Kettenkomplex $\{\widetilde{C}_n, \tilde{\partial}_n\}$, wo $\widetilde{C}_n = C_n(X)$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $\widetilde{C}_{-1} = \mathbb{Z}$ und $\widetilde{C}_n = \{0\}$ für $n \leq -2$. Hier ist $\tilde{\partial}_n$ der übliche Randoperator ∂_n für $n \geq 1$, und $\tilde{\partial}_0 \colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$ ist der **Augmentationshomomorphismus**, definiert durch $\tilde{\partial}_0(\sum n_i T_i) = \sum n_i$ für eine Kette von singulären 0-Quadern T_i.

(a) Zeigen Sie, daß $\tilde{\partial}_0 \circ \tilde{\partial}_1 = 0$.

Die Homologiegruppen $\widetilde{H}_n(X) := \ker \tilde{\partial}_n / \operatorname{im} \tilde{\partial}_{n+1}$ dieses Kettenkomplexes heißen **reduzierte** Homologiegruppen von X.

Zeigen Sie weiter:

(b) Es gilt $\widetilde{H}_n(X) \cong H_n(X)$ für $n \geq 1$.

(c) Die reduzierten 0-Zykel $\widetilde{Z}_0(X) = \ker \tilde{\partial}_0$ bilden eine Untergruppe von $Z_0(X) = C_0(X)$, und man hat eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Es folgt $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$.

(d) Ein Raum X heißt **azyklisch**, falls $\widetilde{H}_*(X) = 0$ (d.h. $\widetilde{H}_n(X) = \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$). Welche der folgenden Räume sind azyklisch?

(i) $*$ (ii) $\mathbb{R}^3$ (iii) $\emptyset$

Aufgabe 4. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von Gruppen und Homomorphismen mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "i_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "j_1"] & B_2 \arrow[r, "j_2"] & B_3 \arrow[r, "j_3"] & B_4 \arrow[r, "j_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Bestimmen Sie die minimalen Annahmen an f_1, f_2, f_4, f_5 (bzgl. Injektivität und Surjektivität), die garantieren, daß f_3

(i) injektiv

(ii) surjektiv

(iii) bijektiv

ist. Zeigen Sie durch Beispiele, daß diese Annahmen nicht weiter abgeschwächt werden können.

Abgabe: Montag, 15.11.21
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs