WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) S^{n-1} ist Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) Das Komplement eines Punktes in S^n ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$.

(c) Zeigen Sie auf zwei verschiedene Weisen, daß $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^m$ ist für $n \neq m$:

(i) Durch Betrachten von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) Durch Betrachten der Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2. (a) Sei X ein topologischer Hausdorff-Raum. Zeigen Sie:

(i) Für jeden beliebigen Punkt $x \in X$ ist das Komplement $X \setminus \{x\}$ von $\{x\}$ offen.

(ii) Die Gruppe $H_k(X, X \setminus \{x\})$, $k \in \mathbb{N}_0$, ist isomorph zu $H_k(U, U \setminus \{x\})$ für jede beliebige Umgebung U von x (d.h. jede beliebige Teilmenge $U \subset X$ mit $x \in \mathring{U}$). Diese Gruppe heißt die **k-dimensionale lokale Homologiegruppe von X in x.**

(b) Eine **n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit** M ist ein topologischer Hausdorff-Raum (mit abzählbarer Basis der Topologie), der lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, d.h. zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ und einen Homöomorphismus $h\colon U \to V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, daß zwei topologische Mannigfaltigkeiten unterschiedlicher Dimension nicht homöomorph zueinander sein können.

Aufgabe 3. (a) Bestimmen Sie die lokalen Homologiegruppen an verschiedenen Punkten von D^n und zeigen Sie damit, daß jeder Homöomorphismus $f\colon D^n \to D^n$ den Rand S^{n-1} bijektiv auf sich abbildet.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Homologiegruppen an verschiedenen Punkten des Möbiusbandes M und des Zylinders Z und zeigen Sie damit, daß M und Z nicht homöomorph sind (wenngleich sie denselben Homotopietyp besitzen).

Aufgabe 4. Die **Quaternionen** sind definiert als 4-dimensionaler reeller Vektorraum

$$\mathbb{H} := \{a = a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \,:\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\},$$

auf dem eine Multiplikation durch die Regel

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

und Distributivität erklärt ist. Die Topologie auf $\mathbb{H}$ ist durch die Identifikation mit $\mathbb{R}^4$ gegeben. Die euklidische Norm ist $|a| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, und das zu $a \in \mathbb{H}$ **konjugierte** Element sei

$$\bar{a} = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$ und $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$.

(b) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$.

(c) Für $a \neq 0$ ist $\bar{a}/|a|^2$ das inverse Element zu a bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{H}$.

(d) $|ab| = |a||b|$.

(e) Die Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{H}$ mit der von $\mathbb{H}$ induzierten Topologie und Multiplikation ist eine topologische Gruppe.

Abgabe: Montag, 22.11.21
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs