WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (a) Berechnen Sie die zelluläre Homologie der Narrenkappe (Übungsblatt 3, Aufgabe 4) aus der dort angegebenen CW-Struktur mit je einer 0-, 1- und 2-Zelle.

(b) Berechnen Sie die Homologie des Raumes, den man aus S^1 durch Anheften einer 2-Zelle mit einer Abbildung $\partial D^2 \to S^1$ vom Grad 2, und einer weiteren 2-Zelle mit Anklebeabbildung vom Grad 3 erhält. Verallgemeinern Sie.

Aufgabe 2. Sei A eine abelsche Gruppe und F die freie abelsche Gruppe, die von einer Menge von Erzeugern von A erzeugt wird. Sei R der Kern der natürlichen Projektionsabbildung $p\colon F \to A$. Dies liefert die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0.$$

Die Untergruppe R ist ebenfalls eine freie abelsche Gruppe.

Sei G eine weitere abelsche Gruppe.

(a) Zeigen Sie, daß die Sequenz

$$R \otimes G \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}_G} F \otimes G \xrightarrow{p \otimes \mathrm{id}_G} A \otimes G \longrightarrow 0$$

ebenfalls exakt ist.

(b) Setze $\mathrm{Tor}(A, G) = \ker(i \otimes \mathrm{id}_G)$. Zeigen Sie, daß dies für $G = \mathbb{Z}_p$ mit der Definition in der Vorlesung (Seite 113) übereinstimmt (wobei das dortige G hier der Gruppe A entspricht), und verifizieren Sie mittels der neuen Definition die Beispiele dort.

Aufgabe 3. (a) Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $g \in G$ ein Element mit $g \otimes 1 = 0$ in $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß dann ein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existiert mit $ng = 0$ in G.

Hinweis: Verwenden Sie die Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen. (vergl. dazu Übungsblatt 9, Aufgabe 4).

b.w.

(b) Sei G eine beliebige abelsche Gruppe. Sei $g \in G$ ein Element mit $g \otimes 1 = 0$ in $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß $(g, 1)$ in $F(G, \mathbb{Q})$ eine endliche Summe von Elementen der Form

$$(g, q_1 + q_2) - (g, q_1) - (g, q_2)$$

und

$$(g_1 + g_2, q) - (g_1, q) - (g_2, q)$$

ist.

(c) Beweisen Sie die Aussage in (a) für alle abelschen Gruppen.

Aufgabe 4. Sei $\{C_n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ ein beliebiger Kettenkomplex. Betrachten Sie die kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow H_n(C_*) \longrightarrow 0.$$

(a) Sei $F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H$ eine exakte Sequenz von abelschen Gruppen. Zeigen Sie, daß dann auch

$$F \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}} G \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}} H \otimes \mathbb{Q}$$

exakt ist.

Hinweis: Benutze Aufgabe 3.

(b) Zeigen Sie, daß $H_n(C_* \otimes \mathbb{Q}) \cong H_n(C_*) \otimes \mathbb{Q}$.

Abgabe: Montag, 20.12.21
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs