WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Im Beweis von Satz 6.3 der Vorlesung hatten wir, ausgehend von der bekannten Homologie über $\mathbb{Z}_2$ der projektiven Räume und mittels der exakten Transfer-Sequenz gezeigt, daß die Randhomomorphismen $\partial_*\colon\ H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^m;\mathbb{Z}_2) \to H_{k-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^m;\mathbb{Z}_2)$ für $1 \leq k \leq m$ Isomorphismen sind.

Überlegen Sie sich letztere Ausage direkt, ohne Verwendung der Transfersequenz, wie in der Bemerkung auf Seite 121 des Skripts angedeutet. Verwenden Sie die Transfersequenz dann umgekehrt, um die Homologie (über $\mathbb{Z}_2$) von $\mathbb{R}\mathrm{P}^m$ zu berechnen.

Aufgabe 2. Wir betrachten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{i} F \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$$

wie in Aufgabe 2 von Übungsblatt 10. Wie dort sei G eine weitere abelsche Gruppe.

(a) Zeigen Sie, daß dann auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,G) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}(F,G) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(R,G)$$

exakt ist. Hier bezeichnen p^*, i^* die zu p, i dualen Abbildungen, d.h. für $\varphi\colon\ A \to G$ ist $p^*\varphi = \varphi \circ p$, und analog für i^*.

(b) Setze $\mathrm{Ext}(A,G) = \mathrm{Hom}(R,G)/\operatorname{im} i^*$. Diese Gruppen treten im universellen Koeffiziententheorem (Satz 7.2) auf. Berechnen Sie $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n)$, $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z})$ und $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)$.

Aufgabe 3. Der n-dimensionale reell projektive Raum $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist der Quotientenraum von S^n, der durch die Identifikation von Antipodenpunkten entsteht, d.h. $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := S^n/\sim$ mit $x \sim y$ für $x, y \in S^n$ genau dann, wenn $y = x$ oder $y = -x$.

Identifizieren Sie $\mathbb{R}^3$ mit dem Raum der rein imaginären Quaternionen, d.h. mit Quaternionen der Form $a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, und S^3 mit dem Raum der Quaternionen der Länge 1. Zeigen Sie:

(a) Konjugation von $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ mit einem Element aus $S^3 \subset \mathbb{H}$ definiert ein Element aus $\mathrm{SO}(3)$, d.h. die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ a & \longmapsto & uau^{-1} \end{array}$$

ist für jedes $u \in S^3$ eine spezielle orthogonale Abbildung (also eine Drehung von $\mathbb{R}^3$ um eine geeignete Achse).

b.w.

(b) Die so definierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \longrightarrow & \mathrm{SO}(3) \\ u & \longmapsto & \{a \mapsto uau^{-1}\} \end{array}$$

ist ein stetiger, surjektiver Homomorphismus von topologischen Gruppen mit Kern $\{\pm 1\}$.

(c) Folgern Sie, daß SO(3) zu $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ homöomorph ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die n-Sphäre S^n kann mit $n+2$ abgeschlossenen Mengen überdeckt werden, von denen keine ein Antipodenpaar enthält.

(b) Seien $A_1, \dots, A_n$ meßbare Teilmengen von S^n. Dann gibt es eine Großsphäre $S^{n-1} \subset S^n$, die jedes A_i in zwei Teilmengen gleichen Maßes zerlegt. Mit Großsphäre ist hier der Schnitt von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit einer Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$ durch den Ursprung gemeint.

Abgabe: Montag, 10.1.22
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs