WS 2021/22

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Algebraische Topologie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Rechnen Sie in lokalen Koordinaten nach, daß für $\omega \in \Omega^p(M)$ und $\eta \in \Omega^q(M)$ gilt

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\eta.$$

Aufgabe 2. (a) Sei θ die übliche Winkelkoordinate auf S^1. Zeigen Sie, daß $\mathrm{d}\theta$ eine wohldefinierte 1-Form auf S^1 ist, die geschlossen, aber nicht exakt ist.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Polarkoordinatenabbildung auf der punktierten Ebene, gegeben durch $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Zeigen Sie, daß

(i) $f^*\left(\dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\right) = \mathrm{d}\theta$;

(ii) $f^*(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = r\,\mathrm{d}r$.

Aufgabe 3. (a) Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Mit E_i, $i = 1, \ldots, n$, sei das Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, das jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ den Tangentialvektor $e_i \in T_x\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$ zuordnet, aufgefaßt als der Geschwindigkeitsvektor in $t = 0$ der Kurve

$$\gamma(t) = x + te_i.$$

Jedes andere Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^n$ ist dann von der Form

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\, E_i.$$

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Definiere die Richtungsableitung $X(f)$ von f in Richtung von X durch

$$X(f)(x) = \mathrm{d}_x f(X(x)),$$

d.h. $X(f)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Funktion, die jedem $x \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung von f im Punkt x in Richtung von $X(x)$ zuordnet. Man zeige

$$X(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f).$$

Dies erklärt, warum man die Vektorfelder E_i sinnvollerweise mit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bezeichnet.

(b) Sei $\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i$ die äußere Ableitung der 0-Form $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ Zeigen Sie, daß $\mathrm{d}f(X) = X(f)$ für jedes Vektorfeld X auf dem $\mathbb{R}^n$. Dies erlaubt eine koordinatenfreie Definition von $\mathrm{d}f$.

Aufgabe 4. (a) Man berechne die äußere Ableitung der folgenden Differentialformen:

(i) $e^x \cos y \, \mathrm{d}x - e^x \sin y \, \mathrm{d}y$ auf dem $\mathbb{R}^2$;

(ii) $x \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ auf dem $\mathbb{R}^3$.

(b) Sei $\omega = y \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ auf dem $\mathbb{R}^2$. Man bestimme alle 1-Formen η, für die $\mathrm{d}\eta = \omega$ gilt.

(c) Sei $\eta = (x^2 - 2xy) \, \mathrm{d}x + (y^2 - 2xy) \, \mathrm{d}y$ auf dem $\mathbb{R}^2$ und $T \colon I \to \mathbb{R}^2$ der singuläre 1-Quader $T(x) = (x, x^2)$, $x \in I$. Man berechne

$$\int_T \eta := \int_I T^* \eta.$$

(d) Zeigen Sie allgemein, daß für eine 1-Form η auf dem $\mathbb{R}^n$ und einen (glatten) singulären 1-Quader $T \colon I \to \mathbb{R}^n$ das Integral $\int_T \eta$ gleich dem Kurvenintegral

$$\int_0^1 \eta_{T(t)}(T'(t)) \, \mathrm{d}t$$

ist (vergl. Analysis III).

Abgabe: Montag, 17.1.22
bis spätestens 18:00 Uhr im ILIAS-Kurs