Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Lineare Algebra I

Übungsblatt 1

Die **Präsenzaufgaben** werden jeweils in der nächsten Übung vor Ort bearbeitet. Sie sollten sich also bis dann Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, möglichst auch in schriftlicher Form; es sind aber keine Lösungen abzugeben.
Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben zählen für die Klausurzulassung.

Präsenzaufgabe 1. Es seien M, N, M', N' Mengen. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß die Menge

$$(M \times N) \setminus (M' \times N')$$

im allgemeinen verschieden ist von der Menge

$$(M \setminus M') \times (N \setminus N').$$

Zeigen Sie, andererseits, daß $(M \times N) \setminus (M' \times N')$ stets als Vereinigung zweier Mengen der Form $A \times B$ geschrieben werden kann.

Hier bezeichnet $M \times N$ das **kartesische Produkt** der Mengen M und N, d.h.

$$M \times N = \big\{(x, y)\colon\ x \in M,\, y \in N\big\}.$$

Hinweis: Zeichnen Sie eine Skizze (z.B. mit Teilmengen von $\mathbb{R}$), die die Fragestellungen veranschaulicht.

Präsenzaufgabe 2. In der Vorlesung hatten wir das Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ definiert durch $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$ für $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i)$. Dieses Skalarprodukt ist offensichtlich **symmetrisch**, d.h. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle$.

(a) Zeigen Sie, daß das Skalarprodukt **bilinear** ist. Rechnen Sie dazu die Linearität im ersten Eintrag nach:

$$\langle \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda'\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2\rangle = \lambda\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle + \lambda'\langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2\rangle \ \text{ für } \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \text{ und } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2;$$

die Linearität im zweiten Eintrag folgt dann aus der Symmetrie.

(b) Wie wir in der Vorlesung gesehen hatten, sind $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ genau dann orthogonal (Notation: $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$), wenn $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$. Nutzen Sie die Bilinearität des Skalarprodukts, um zu zeigen, daß dies äquivalent zu der Bedingung $|\mathbf{v} - \mathbf{w}| = |\mathbf{v} + \mathbf{w}|$ ist. Hier ist $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ formal definiert als $\mathbf{v} + (-1) \cdot \mathbf{w}$.

Was bedeutet die Bedingung $|\mathbf{v} - \mathbf{w}| = |\mathbf{v} + \mathbf{w}|$ geometrisch? Dies liefert eine Motivation dafür, Orthogonalität tatsächlich über die Bedingung $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$ zu *definieren* — auch in höherdimensionalen oder abstrakten Vektorräumen mit einem Begriff von 'Skalarprodukt', was wir später in der Vorlesung diskutieren werden.

(c) Beweisen Sie den Satz des Pythagoras: Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ sind orthogonal genau dann, wenn

$$|\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2.$$

b.w.

Hausaufgabe 1. In dieser Aufgabe betrachten wir den $\mathbb{R}^2$ mit dem in der Vorlesung beschriebenen Skalarprodukt.

(a) Gegeben seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{v} \neq (0,0)$. Zeigen Sie, daß es genau eine Möglichkeit gibt, den Vektor $\mathbf{w}$ in der Form

$$\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

mit $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ zu schreiben, und zwar mit $\lambda = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle / |\mathbf{v}|^2$. (Skizze!) Der Vektor $\lambda \mathbf{v}$ in dieser Zerlegung von $\mathbf{w}$ heißt **Orthogonalprojektion** von $\mathbf{w}$ auf $\mathbf{v}$.

(b) Verwenden Sie (a) und den Satz des Pythagoras aus Präsenzaufgabe 2, um zu zeigen, daß für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|.$$

Bemerkung: Dies folgt schon aus unserer Beobachtung in der Vorlesung, daß

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Der hier vorgeschlagene Beweis funktioniert allerdings auch ganz allgemein in höherdimensionalen Vektorräumen und erlaubt damit die Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren, unabhängig von der anschaulich-geometrischen Definition des Cosinus.

(c) Folgern Sie mittels (b), daß für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ die **Dreiecksungleichung**

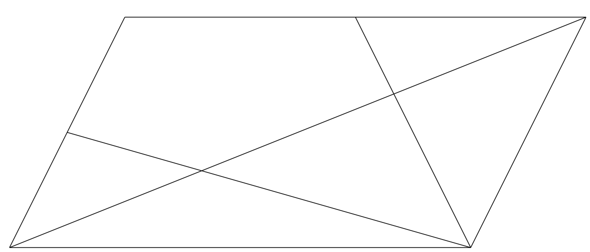
$$|\mathbf{v} + \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|$$

gilt. Was bedeutet dies geometrisch?

Hausaufgabe 2. In dieser Aufgabe sollen zwei elementare Aussagen der ebenen Geometrie mittels der Verwendung von Vektoren gezeigt werden.

(a) In einem ebenen Viereck verbinde man die Mittelpunkte aufeinanderfolgender Seiten. Zeigen Sie: Das neu entstandene Viereck ist ein Parallelogramm.

(b) In einem Parallelogramm verbinde man eine Ecke mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten. Wie wird die Diagonale geteilt?



Abgabe der Hausaufgaben: Dienstag, 17.10.23
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).
Geben Sie bitte unbedingt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe an, andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!
Bitte tackern Sie Ihre Übungsblätter.