Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Lineare Algebra I

Übungsblatt 2

Präsenzaufgabe 1. (a) Wie viele Abbildungen $\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ gibt es?

(b) Wie viele injektive Abbildungen $\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ gibt es?

(c) Wie viele surjektive Abbildungen $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$ gibt es?

(d) Wie viele bijektive Abbildungen $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ gibt es?

Präsenzaufgabe 2. (a) Sei a eine komplexe Zahl. Wie viele Lösungen der Gleichung $z^2 = a$ gibt es in $\mathbb{C}$? Wie kann man diese in Polarkoordinaten beschreiben? Jede solche Lösung heißt (Quadrat-)Wurzel von a und wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet (im Gegensatz zu den reellen Zahlen, wo z.B. $\sqrt{3}$ nur die *positive* Lösung der Gleichung $x^2 = 3$ bezeichnet).

(b) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\text{(i) } \frac{1}{1+\mathrm{i}} \qquad \text{(ii) } \frac{2-3\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}} \qquad \text{(iii) } \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^k,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \text{(iv) } \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$$

Hausaufgabe 1. Im reellen Vektorraum V aller Funktionen $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ betrachten wir folgende Teilmengen.

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{f \in V\colon\ f(0) = 0\},\\
U_2 &:= \{f \in V\colon\ f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in [-1,1]\},\\
U_3 &:= \{f \in V\colon\ f(-1) = -f(1)\},\\
U_4 &:= \{f \in V\colon\ f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in [-1,1]\}.
\end{aligned}$$

Welche dieser Teilmengen (mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen) sind selbst wieder reelle Vektorräume? (Begründen Sie Ihre Antworten!)

Hausaufgabe 2. Die reellen Zahlen bilden selbst einen reellen Vektorraum $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$; die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation sind hier die gewöhnliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen.

Wir wollen nun eine andere Vektoraddition und andere Skalarmultiplikationen auf der Menge $V = \mathbb{R}$ definieren und klären, ob V dadurch ebenfalls die Struktur eines reellen Vektorraumes erhält. Dazu schreiben wir eine reelle Zahl in gewöhnlichen Buchstaben, wenn wir die Zahl als Skalar auffassen, und mit Unterstrich, wenn wir die Zahl als Element von V auffassen. Wir schreiben die neue Vektoraddition als $\oplus$, und die neuen Skalarmultiplikationen als $\odot$.

Zunächst definieren wir für $\underline{a}, \underline{b} \in V = \mathbb{R}$ die Vektoraddition durch

$$\underline{a} \oplus \underline{b} := \underline{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}.$$

Hier ist für $a \in \mathbb{R}$ die dritte Wurzel $x = \sqrt[3]{a}$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl mit $x^3 = a$.

(a) Wie muß man den Nullvektor und das negative Element zu einem Vektor definieren, damit mit dieser Vektoraddition die Axiome (A1) bis (A4) eines Vektorraumes erfüllt sind?

Weiter betrachten wir die beiden folgenden Kandidaten für eine Skalarmultiplikation:

(i) $a \odot \underline{b} := \underline{ab}$,

(ii) $a \odot \underline{b} := \underline{\sqrt[3]{a} \cdot b}$.

Damit zu den weiteren Aufgabenstellungen:

(b) Zeigen Sie, daß beide Definitionen den Axiomen (S1) und (S2) genügen.

(c) Klären Sie, ob die jeweilige Skalarmultiplikation auch die Distributivgesetze (D) erfüllt.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch (**neu!**), 25.10.23
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).
Geben Sie bitte unbedingt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer
sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe an,
andernfalls können Ihre Lösungen nicht bewertet werden!
Bitte tackern Sie Ihre Übungsblätter.