WS 2023/24

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Lineare Algebra I

Übungsblatt 4

Präsenzaufgabe 1. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$. Zeigen Sie:

(a) Falls $\mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4) = V$, dann auch $\mathrm{Lin}(v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4) = V$.

(b) Falls (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unabhängig ist, dann auch $(v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4)$.

Präsenzaufgabe 2. Wir können $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sowohl als Vektorraum über $\mathbb{R}$ als auch als als Vektorraum über $\mathbb{C}$ auffassen.

(a) Zeigen Sie, daß $(1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i})$, aufgefaßt als Paar im *reellen* Vektorraum $\mathbb{C}$, linear *unabhängig* ist.

(b) Zeigen Sie, daß $(1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i})$, aufgefaßt als Paar im *komplexen* Vektorraum $\mathbb{C}$, linear *abhängig* ist.

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ von $\mathbb{C}$ als reeller bzw. komplexer Vektorraum.

Präsenzaufgabe 3. Es seien $p_0, \ldots, p_m$ reelle Polynome vom Grad $\leq m$ mit $p_j(2) = 0$ für alle $j = 0, \ldots, m$. Zeigen Sie, daß $(p_0, \ldots, p_m)$ linear abhängig ist.

Ein **Polynom** über einem Körper $\mathbb{K}$ ist ein formaler Ausdruck der Form

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und mit **Koeffizienten** $a_i \in \mathbb{K}$. Abgesehen vom Nullpolynom wählen wir n stets so, daß $a_n \neq 0$, und dieses n ist dann der **Grad** des Polynoms. Zwei Polynome werden genau dann als gleich betrachtet, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen.

Damit ist klar, daß die Menge $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ der Polynome über $\mathbb{K}$ vom Grad $\leq n$ (mit der offensichtlichen Addition und Skalarmultiplikation) ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n + 1$ mit Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ ist.

Jedes Polynom $p(x)$ über $\mathbb{K}$ definiert eine Abbildung $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ durch $x \mapsto p(x)$. Es gibt aber im allgemeinen keine bijektive Beziehung zwischen den Polynomen als formale Ausdrücke und den Polynomen als Abbildungen. Zum Beispiel gilt für $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, daß die Polynome $p_1(x) = x$ und $p_2(x) = x^2$ verschieden sind, aber $p_1(0) = p_2(0) = 0$ und $p_1(1) = p_2(1) = 1$, d.h. als Abbildungen sind die beiden Polynome identisch.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist ein Polynom tatsächlich durch die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x)$ bestimmt, wie Sie sich in der Bonusaufgabe überlegen dürfen. In der ersten Hausaufgabe können Sie daher mit der einen oder der anderen Interpretation des Begriffs ‘Polynom’ arbeiten.

b.w.

Hausaufgabe 1. Im reellen Vektorraum $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ aller reellen Polynome betrachte man für $i = 0, \ldots, n$ die Elemente $p_i(x) := (x - x_0)^i$, mit einem fest gewählten $x_0 \in \mathbb{R}$, und $q_i(x)$, erklärt durch

$$\begin{aligned} q_0(x) &:= 1, \\ q_1(x) &:= x, \\ q_2(x) &:= x(x-1), \\ q_3(x) &:= x(x-1)(x-2), \\ &\ldots \\ q_n(x) &:= x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, daß sowohl $(p_0, \ldots, p_n)$ als auch $(q_0, \ldots, q_n)$ ein linear unabhängiges $(n+1)$-Tupel ist.

(b) Gilt $\mathrm{Lin}(p_1, \ldots, p_n) = \mathrm{Lin}(q_1, \ldots, q_n)$? (Hier fängt die Indizierung bewußt bei $i = 1$ an!)

Hausaufgabe 2. In Analogie mit der Formel für die Anzahl der Elemente in der Vereinigung dreier endlicher Mengen, könnte man folgende Formel für die Dimension der Summe dreier Unterräume U_1, U_2, U_3 eines Vektorraumes V vermuten:

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2 + U_3) \quad = \quad & \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 \\ & - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_2 \cap U_3) \\ & + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3). \end{aligned}$$

Beweisen Sie diese Formel oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß ein reelles Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ (als formales Polynom) vollständig durch die reellwertige Funktion $x \mapsto p(x)$ bestimmt ist.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch 8.11.
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).