Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Lineare Algebra I

Übungsblatt 5

Präsenzaufgabe 1. Zeigen Sie, daß das Bild einer Geraden im $\mathbb{R}^n$ (nicht notwendigerweise durch den Ursprung) unter einer linearen Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wieder eine Gerade oder ein Punkt ist.

Präsenzaufgabe 2. Es bezeichne $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ den Vektorraum aller reellen Polynome, und $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ den Unterraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

(a) Ist die Abbildung $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $p \mapsto x^2 p$ linear?

(b) Für $b, c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die durch

$$f(p) = \Big(3p(4) + 5p'(6) + bp(1)p(2), \int_{-1}^{2} x^3 p(x)\,\mathrm{d}x + c \sin p(0)\Big)$$

definierte Abbildung $f\colon\ \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß f genau dann linear ist, wenn $b = c = 0$.

(c) Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ die durch Ableitungen definierte lineare Abbildung $f(p) = p' + p''$. Finden Sie Basen von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ und $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, bezüglich welcher f die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Präsenzaufgabe 3. Ist die Komposition von Endomorphismen eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V kommutativ, d.h. gilt $f \circ g = g \circ f$ für $f, g \in \mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$?

Hausaufgabe 1. (a) Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie:

(i) Falls $\dim V > \dim W$, so ist eine lineare Abbildung $V \to W$ niemals injektiv.

(ii) Falls $\dim V < \dim W$, so ist eine lineare Abbildung $V \to W$ niemals surjektiv.

(b) Es seien V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, wobei jetzt nur W als endlich-dimensional vorausgesetzt wird. Zeigen Sie, daß für zwei Abbildungen $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, W)$ genau dann $\mathrm{Kern}\, f_1 \subset \mathrm{Kern}\, f_2$ gilt, wenn es eine Abbildung $g \in \mathrm{End}(W)$ gibt mit $f_2 = g \circ f_1$.

Hinweis: Für die Konstruktion von g kann man zunächst vereinfachend annehmen, daß auch V endlich-dimensional ist. Es gibt aber auch ein Argument, das die Annahme $\dim V < \infty$ nicht benötigt.

b.w.

Hausaufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß die Menge

$$\{f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4) : \ \dim \operatorname{Kern} f > 2\}$$

kein Unterraum des reellen Vektorraumes $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$ ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines Endomorphismus f von $\mathbb{R}^4$ mit $\operatorname{Bild} f = \operatorname{Kern} f$.

(c) Zeigen Sie, daß es keinen Endomorphismus f von $\mathbb{R}^5$ mit $\operatorname{Bild} f = \operatorname{Kern} f$ gibt.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch 15.11.
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).