WS 2023/24

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Lineare Algebra I

Übungsblatt 6

Präsenzaufgabe 1. (a) Zeigen Sie mit dem Kongruenzsatz SSS für Dreiecke in der euklidischen Ebene, daß eine längentreue lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auch winkeltreu ist und damit das Skalarprodukt erhält. Dies werden wir später allgemeiner für längentreue Abbildungen von euklidischen Vektorräumen beweisen.

(b) Rechnen sie direkt mit der Matrixdarstellung von Drehungen und Spiegelungen nach, daß diese das Standardskalarprodukt erhalten.

(c) Wir betrachten die Dreh- und Spiegelungsmatrizen

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß diese Matrizen tatsächlich eine Drehung bzw. Spiegelung beschreiben, indem Sie den Effekt dieser Matrizen auf ausgesuchte Vektoren berechnen.

(d) Berechnen Sie die Matrixprodukte

$$D_\alpha D_\beta, \;\; D_\alpha S_\beta, \;\; S_\beta D_\alpha \;\text{ und }\; S_\alpha S_\beta,$$

und schreiben Sie das Ergebnis wieder als Dreh- oder Spiegelungsmatrix.

(e) Es sei P die Projektionsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}$$

aus der Vorlesung. Zeigen Sie, daß das Matrix-Produkt $P^2 := PP$ gleich P ist.

Präsenzaufgabe 2. Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ Matrizen, die der Gleichung $AB - BA = E$ genügen. Zeigen Sie, daß für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Identität $A^m B - BA^m = mA^{m-1}$ gilt.

Präsenzaufgabe 3. Es sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ eine $(m\times n)$-Matrix mit Spalten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^m$. Erklären Sie, warum das Bild der durch A definierten linearen Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ gleich der linearen Hülle $\mathrm{Lin}(a_1, \ldots, a_n)$ ist.

Hausaufgabe 1. Es seien $f, g \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^n)$. Zeigen Sie die Ungleichungen

$$\operatorname{Rang} f + \operatorname{Rang} g - n \leq \operatorname{Rang}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{Rang} f, \operatorname{Rang} g),$$

wobei $\min(a, b)$ die kleinere der beiden Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ (hier: $a, b \in \mathbb{N}_0$) bezeichnet.

Hausaufgabe 2. Für eine komplexe Zahl $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ bezeichne $\overline{z} := x - y\mathrm{i}$ die komplex konjugierte Zahl. Zeigen Sie, daß die Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

mit $z, w \in \mathbb{C}$ bezüglich der Matrizenaddition und -multiplikation alle Körperaxiome bis auf das Kommutativgesetz der Multiplikation erfüllen. (Es soll also auch explizit durch ein Beispiel gezeigt werden, daß das Kommutativgesetz der Multiplikation verletzt ist!) Man sagt: Diese Matrizen bilden einen **Schiefkörper**.

Bonusaufgabe. Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$, und $f \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie: Wird f bezüglich jeder Basis von V durch dieselbe Matrix $A \in \mathbb{K}^n$ dargestellt, d.h. $A = h^{-1} f h$ für jeden Isomorphismus $h\colon \mathbb{K}^n \to V$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $f = \lambda \operatorname{id}_V$ (und $A = \lambda E_n$).

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch 22.11.
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).