WS 2023/24

Prof. Hansjörg Geiges
Tilman Becker, M.Sc.

Lineare Algebra I

Übungsblatt 7

Präsenzaufgabe 1. Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Präsenzaufgabe 2. Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Basen

$$\mathcal{B}\colon\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und

$$\widetilde{\mathcal{B}}\colon\ \tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},\ \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \tilde{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $v_{\mathcal{B}}$ die Spaltendarstellung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, d.h. für

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$$

gilt

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Analog definieren wir $v_{\widetilde{\mathcal{B}}}$. Bestimmen Sie die Matrix T, die diese Spaltendarstellungen ineinander transformiert, d.h. $Tv_{\mathcal{B}} = v_{\widetilde{\mathcal{B}}}$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$.

Hausaufgabe 1. Unter einer **Partition** einer Menge M versteht man eine Zerlegung $M = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ in disjunkte Teilmengen $U_\alpha \subset M$. Hier ist A eine beliebige Indexmenge, und $\bigsqcup$ bezeichnet die disjunkte Vereinigung, d.h. $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ für $\alpha \neq \beta$, und $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

In dieser Aufgabe wollen wir uns überlegen, daß eine Äquivalenzrelation auf einer Menge und eine Partition dieser Menge im wesentlichen identische Begriffe sind.

(a) Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Zeigen Sie, daß die Äquivalenzklassen

$$[x] := \{y \in M \colon\ x \sim y\}$$

eine Partition von M definieren, d.h. jedes Element von M liegt in einer Äquivalenzklasse, und je zwei Äquivalenzklassen sind entweder disjunkt oder identisch.

(b) Umgekehrt sei eine Partition $M = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ von M gegeben. Zeigen Sie, daß durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x, y \in U_\alpha \text{ für ein } \alpha \in A$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird, deren Äquivalenzklassen die U_α sind.

Hausaufgabe 2. Gegeben sei eine lineare Abbildung $f \colon V \to W$ endlichdimensionaler Vektorräume, mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$.

(a) Eine Basis $(w_1, \ldots, w_m)$ von W sei bereits vorgegeben. Zeigen Sie, daß man eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V so wählen kann, daß für die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ von f bezüglich dieser Basen gilt:

$$a_{11} \in \{0, 1\}, \quad a_{12} = 0, \ldots, a_{1n} = 0.$$

(b) Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) Rang $f = 1$;

   (ii) Man kann Basen von V und W so wählen, daß die Matrix A von f bezüglich dieser Basen alle Einträge gleich 1 hat.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch 29.11.
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).