WS 2023/24

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra I

Übungsblatt 11

Präsenzaufgabe 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Ist A orthogonal, also Element von $\mathrm{O}(n)$, so bildet die lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ (bezüglich des Standardskalarproduktes) wieder auf eine Orthonormalbasis ab.

(b) Gibt es umgekehrt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, die durch A wieder auf eine Orthonormalbasis abgebildet wird, so ist A orthogonal.

(c) A ist orthogonal genau dann, wenn die Zeilen von A eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Präsenzaufgabe 2. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, ist jede Isometrie eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraumes ein Isomorphismus. Beschreiben Sie eine Isometrie des euklidischen Vektorraumes ℓ_2 (siehe Abschnitt 7.1 der Vorlesung), die kein Isomorphismus ist.

Hausaufgabe 1. Es sei V der Vektorraum der beschränkten reellen Zahlenfolgen, mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation, d.h.

$$V = \bigl\{x = (x_\nu)_{\nu=1,2,\dots}\colon\ x_\nu \in \mathbb{R} \text{ und es gibt ein } c \in \mathbb{R} \text{ mit } |x_\nu| < c \text{ für alle } \nu.\bigr\}.$$

Beachten Sie, daß c hier von der Folge x abhängt.

(a) Zeigen Sie, daß durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu y_\nu}{\nu^2}$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ist.

(b) Finden Sie einen *echten* Unterraum $U \subset V$, d.h. $U \neq V$, mit $U^\perp = \{0\}$. Nach dem Zerlegungssatz muß ein solcher Unterraum notwendigerweise unendlich-dimensional sein.

Hausaufgabe 2. Es sei $\bigl(V, \langle\,.\,,\,.\,\rangle\bigr)$ ein euklidischer Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine längentreue Abbildung mit $f(0) = 0$. Wir setzen *nicht* voraus, daß f linear ist, daher ist Längentreue zu verstehen als

$$|f(v) - f(w)| = |v - w| \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Mit $f(0) = 0$ impliziert dies insbesondere $|f(v)| = |v|$ für alle $v \in V$.

Wir wollen nun zeigen, daß eine solche Abbildung f notwendigerweise linear ist. Überlegen Sie sich dazu die folgenden Schritte.

(i) Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$.

(ii) Für $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right|.$$

(iii) Zeigen Sie durch geeignete Wahl von v_1, v_2, v_3 und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in (ii), daß f linear ist.

b.w.

Bonusaufgabe 1. Beweisen Sie die folgenden elementargeometrischen Aussagen über Parallelogramme:

(a) Ein Parallelogramm hat genau dann gleich lange Seiten (ist also ein Rhombus), wenn die beiden Diagonalen orthogonal zueinander sind.

(b) Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn beide Diagonalen gleich lang sind.

Bonusaufgabe 2. Es sei V der Vektorraum der reellen polynomialen Funktionen $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3. Mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ist V ein euklidischer Vektorraum. Wenden Sie das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis $(1, x, x^2, x^3)$ an, um eine Orthonormalbasis von V zu konstruieren.

Bonusaufgabe 3. Es sei $\big(V, \langle\,.\,,\,.\,\rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum, $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler Unterraum mit Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_n)$, und $v \in V$ sei gegeben. In dieser Aufgabe wollen wir uns ein analytisches Argument dafür überlegen, daß es ein $u_0 \in U$ gibt mit $|v - u_0| < |v - u|$ für alle $u \in U \setminus \{u_0\}$.

Betrachten Sie dazu die reellwertige Funktion $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := |v - (\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n)|^2.$$

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}$ für $i = 1, \ldots, n$. (Dazu denkt man sich die λ_j mit $j \neq i$ als feste Parameter und leitet im gewöhnlichen Sinne nach λ_i ab.)

(b) Finden Sie den (eindeutigen) Punkt $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$, wo alle diese partiellen Ableitungen verschwinden.

(c) Berechnen Sie die sogenannte **Hessesche Matrix**

$$H := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_i\,\partial \lambda_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n} := \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_i}\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_j}\right)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

im Punkt $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ — tatsächlich hängt H hier nicht vom Punkt ab —, und verifizieren Sie, daß die bilineare Abbildung $(x, y) \mapsto x^{\mathrm{t}} H y$ (für $x, y \in \mathbb{R}^n$) symmetrisch und positiv definit ist.

In der Analysis II werden Sie lernen, daß das Verschwinden der partiellen Ableitungen notwendig dafür ist, daß f im Punkt $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ ein Minimum besitzt, und die positive Definitheit der Hesseschen ist dann hinreichend dafür, daß es sich um ein isoliertes lokales Minimum handelt. Im konkreten Fall hat f längs jeder Geraden parallel zu einer Koordinatenachse genau ein globales Minimum, und daher ist $(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0)$ tatsächlich der Punkt, wo f sein *globales* Minimum annimmt.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch 10.1.
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).