WS 2023/24

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra I

Übungsblatt 12

Präsenzaufgabe 1. Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnliche Matrizen, d.h. es existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ derart, daß $B = TAT^{-1}$. In der Vorlesung hatten wir aus der allgemeinen Theorie heraus argumentiert, daß A und B die gleichen Eigenwerte und isomorphe Eigenräume haben, da ähnliche Matrizen als Matrixdarstellung ein und derselben linearen Abbildung bezüglich zweier verschiedener Basen gelesen werden können. Hier wollen wir das direkt und einfacher zeigen.

Zeigen Sie:

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ ist Eigenwert von A genau dann, wenn λ Eigenwert von B ist, und zwar

(i) mittels der ursprünglichen Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren durch $Ax = \lambda x$, $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$;

(ii) mittels der Charakterisierung von Eigenwerten durch das Verschwinden der Determinante von $\lambda E - A$.

(b) Ist E_λ der Eigenraum von A zum Eigenwert λ, so ist $T(E_\lambda)$ der Eigenraum von B zum Eigenwert λ.

Präsenzaufgabe 2. In dieser Aufgabe wollen wir sehen, daß die Wahl des zugrundeliegenden Körpers entscheidend für die Eigenraumtheorie ist.

(a) Wir hatten gesehen, daß die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung durch einen Winkel $0 < \alpha < \pi$ keine Eigenwerte besitzt. Wir können diese Drehung auch als $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lesen. Hat sie dann (komplexe) Eigenwerte?

(b) Die reellen (2×2)-Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

können sowohl als $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als auch als $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ aufgefaßt werden. Berechnen Sie für beide Interpretationen die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

Hausaufgabe 1. In dieser Aufgabe wollen wir Körper mit 5 bzw. 4 Elementen konstruieren.

(a) Auf der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ erklären wir Addition und Multiplikation durch die gewöhnliche Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen, wobei wir jetzt aber 'modulo 5' rechnen, d.h. nur den Rest beim Teilen durch 5 berücksichtigen. Zum Beispiel

$$2 + 4(= 6) = 1 \quad \text{und} \quad 3 \cdot 4(= 12) = 2.$$

Stellen Sie die vollständige Additions- und Multiplikationstabelle auf (wie für $\mathbb{F}_2$ auf Seite 32 im Skript der Vorlesung), und zeigen Sie, daß damit ein Körper definiert ist. Dieser wird mit $\mathbb{F}_5$ bezeichnet.

b.w.

(b) Zeigen Sie, daß ein entsprechender Ansatz mit der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ und Rechnen modulo 4 einen kommutativen Ring mit 1 (und insgesamt vier Elementen) liefert, aber *keinen* Körper. Welches Körperaxiom ist hier verletzt?

(c) Im Ring $\mathbb{F}_2[x]$ der Polynome über dem Körper $\mathbb{F}_2$ rechnen wir jetzt modulo das Polynom $1 + x + x^2$, und schreiben den resultierenden Ring als $\mathbb{F}_2[x]/\langle 1 + x + x^2 \rangle$. In diesem 'Restklassenring' stellen also zwei Polynome $p(x), q(x)$ über $\mathbb{F}_2$ das gleiche Element dar, wenn sie sich um ein (polynomiales) Vielfaches von $1 + x + x^2$ unterscheiden, d.h., falls

$$p(x) - q(x) = (1 + x + x^2) \cdot a(x) \quad \text{mit} \quad a(x) \in \mathbb{F}_2[x].$$

Insbesondere gilt in diesem Restklassenring also $1 + x + x^2 = 0$. Weiter gilt beispielsweise $x + x = 2x = 0$, da wir ja über $\mathbb{F}_2$ arbeiten, und

$$x \cdot x^2 = x \cdot (-(1 + x)) = x \cdot (1 + x) = x + x^2 = -1 = 1.$$

Betrachten Sie die vier Polynome $0, 1, x, x^2$, und stellen Sie auch hier die vollständige Additions- und Multiplikationstabelle (modulo $1 + x + x^2$) auf. Verifizieren sie damit, daß der Restklassenring $\mathbb{F}_2[x]/\langle 1 + x + x^2 \rangle$ ein Körper mit genau diesen vier Elementen (genauer: deren Restklassen) ist.

Hausaufgabe 2. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus von V.

(a) Ein Unterraum $U \subset V$ heißt *invariant* unter f, falls $f(U) \subset U$. Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Eigenräume von $f^n := f \circ \cdots \circ f$ (n Faktoren) invariant unter f sind.

(b) Es sei

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ein Polynom über $\mathbb{K}$, d.h. $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Wir definieren den Endomorphismus $p(f)\colon V \to V$ durch

$$p(f) := a_0 \mathrm{id}_V + a_1 f + \cdots + a_n f^n.$$

Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert von f, so ist $p(\lambda)$ Eigenwert von $p(f)$.

Bonusaufgabe 1. Zeigen Sie, daß sich jedes reelle Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ als ein Produkt von linearen und quadratischen reellen Polynomen schreiben läßt.

Bonusaufgabe 2. Es sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei λ ein Element von $\mathbb{K}$. Wir wollen ohne Polynomdivision zeigen, daß $p(\lambda) = 0$ genau dann, wenn sich $p(x)$ schreiben läßt als

$$p(x) = (x - \lambda) q(x)$$

mit einem Polynom $q(x)$ vom Grad $n - 1$.

Die eine Richtung ist offensichtlich: falls p so geschrieben werden kann, folgt durch Einsetzen $p(\lambda) = (\lambda - \lambda) q(\lambda) = 0$. Für die andere Richtung, überlegen Sie sich (mindestens) eines der folgenden Argumente.

(i) Jedes Polynom vom Grad n ist Linearkombination der $n+1$ Monome $1, x - \lambda, \ldots, (x - \lambda)^n$. Überlegen Sie sich dann weiter, was Sie aus $p(\lambda) = 0$ über diese Linearkombination folgern können.

(ii) Betrachten Sie $p(x) = p(x) - p(\lambda)$. Schreiben Sie das Polynom $x^k - \lambda^k$ explizit in der Form $(x - \lambda) u(x)$ mit einem Polynom $u(x)$ vom Grad $k - 1$.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch 17.1.
bis spätestens 18 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).