Arbitragefreie Preise

Maren Schmeck

24. Oktober 2006

1 Einleitung

$P_i(t)$	Preis von Anleihe i zur Zeit t, $i = 1, ..., n$
x_i	Anzahl an Einheiten der Anleihe i
$V(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i(t)$	Wert eines Portfolios mit x_i Einheiten von Anleihe i

Arbitrage tritt auf, falls

- wir in der Lage sind zur Zeit Null ein Portfolio zu konstruieren, das den Wert 0 hat
- zu einem festen Zeitpunkt T in der Zukunft uns dieses Portfolio mit Sicherheit einen Gewinn ausschütten wird

Formal:

- $V(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i(0) = 0$
- $P[V(t) \geq 0] = 1$
- $P[V(t) > 0] > 0$

Das **Prinzip von No-Arbitrage** besagt, dass solche Arbitragemöglichkeiten nicht existieren. Arbitragefreiheit bedeutet auch, dass

- wir kein risikoloses Portfolio konstruieren können, das mehr als die risikolose Zinsrate zurückbringt
- wenn zwei Porfolios A und B in Zukunft mit Sicherheit identische Cashflows ausgeben, dann müssen A und B auch in der Gegenwart denselben Wert haben (**Gesetz des einzigen Preises**)

2 Fundamentales Theorem vom Asset Pricing

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P das natürliche ("die Welt abbildende") Wahrscheinlichkeitsmaß ist. r(t) sei stochastisch. Der **Bankkontoprozess** $B(t)$ sei wie folgt definiert

$$B(t) = B(0)\, exp\Big(\int_0^t r(s)\, ds\Big)$$

Definition. Ein (cadlag) stochastischer Prozess W auf $\mathbf{R}$ heißt **Standard Brownsche Bewegung**, falls

- $W_0 = 0$
- W hat unabhängige Zuwächse
- $W_t \sim N(0, t)$

Ein d-dimensionaler Prozess W, wobei (W^i) unabh. Brownsche Bewegungen sind, heißt **d-dimensionale Brownsche Bewegung**
$X_t = \mu t + \sigma W_t$ heißt (μ, σ^2)**-B.B.**

Diese letzte Gleichung führt zu einer stochastischen DGL der Form

$$dX(t) = \mu(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dW(t)$$

(vgl. Bauer S.429).
Betrachte nun wieder den Bankkontoprozess B_t. Es gilt

$$dB(t) = r(t)B(t)dt$$

Insbesondere fehlt also der Brownsche $dW(t)$-Term, was heißt, dass $\sigma^2 = 0$ ist. Deswegen beschreibt man den Bankkontoprozess als risikolos, obwohl $r(t)$ stochastisch ist.

Definition. Ein **Portfolio (Strategie)** ist eine Menge von Wertpapieren und wird festgelegt durch einen Vektor $\varphi_t = (\varphi_t^0, ..., \varphi_t^m)$ mit φ_t^i Anteile am Wertpapier i zur Zeit t.
Negative Anteile entsprechen Verkäufen.
Eine Strategie, bei der kein Geld entnommen oder hinzugefügt wird, heißt **selbstfinanzierend**.
Ein **Claim** h (= eine nichtnegative meßbare Zufallsgröße h) ist **duplizierbar**, falls eine selbstfinanzierende Handelsstratergie φ existiert, mit $V_T(\varphi) = h$.
Das Modell heißt **vollständig**, wenn alle Claims duplizierbar sind.

Definition. Zwei Verteilungen P und Q heißen **äquivalent**, $P \sim Q$, wenn für alle Ereignisse A $P(A) = 0$ genau dann gilt, wenn $Q(A) = 0$.

Fundamentales Theorem vom Asset Pricing. (i) Die Entwicklung von Bondpreisen ist arbitragefrei genau dann, wenn ein Maß Q existiert, das zu P äquivalent ist, und unter dem für alle T der diskontierte Preisprozess $\frac{P(t,T)}{B(t)}$ für alle $t : 0 < t < T$ ein Martingal ist.
(ii) Gilt (i), dann ist der Markt genau dann vollständig, wenn Q das eindeutige Maß ist, unter dem $\frac{P(t,T)}{B(t)}$ ein Martingal ist.

Das Maß Q wird auch **äquivalentes Martingal Maß** genannt.

Korollar. Es gilt

$$P(t,T) = E_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

mit $\mathcal{F}_t$ σ-Algeba erzeugt vom Preisverlauf bis zur Zeit t und E_Q Erwartungswert bzgl. des äquivalenten Martingal Maß Q.

Bemerkung. Sei X eine $\mathcal{F}_t$-meßbare Zahlung für ein Derivat, zahlbar bei T, und $V(t)$ der faire Wert des Kontrakts. Dann ist der diskontierte Preisprozess $\frac{V(t)}{B(t)}$ auch ein Martingal unter Q. Daher

$$V(t) = E_Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)X \mid \mathcal{F}_t\right]$$

3 Long-Term Spot Rate

Definition. $l\,(t) = \lim_{T\to\infty} R(t,T)$ bezeichnet man als **Long-Term Spot Rate** (falls dieser Limes exisiert).

Da Zero-Coupon Bonds nur Laufzeiten von höchstens 30 Jahren haben, ist es nicht möglich $l\,(t)$-Daten exakt zu betrachten. Die Werte müssen statistisch geschätzt werden.

Dybvig-Ingersoll-Ross Theorem. Angenommen, die Entwicklung der Zinsstrukturkurven sind arbitragefrei. Dann nimmt $l\,(t)$ fast sicher nicht ab.

4 Faktoren

Definition. Ein **1-Faktor Modell** ist ein Modell, bei dem es nur eine einzige, eindimensionale Quelle von Zufälligkeit gibt.

Ein Beispiel ist die eindimensionale Brownsche Bewegung. In einem solchen Modell sind alle Preisveränderungen perfekt (wenn auch nicht linerar) miteinander korelliert, dh. kennen wir die Veränderung in einer Größe (z.B. $r\,(t)$), dann kennen wir die Veränderung im Preis von allen Anleihen.

Definition. In einem **Multi-Faktoren Modell** gibt es mehr als eine Quelle der Zufälligkeit.

Ein Beispiel für einen Zwei-Faktor Modell ist die 2-dimensionale Brownsche Bewegung (mit der Short-Term Rate $r\,(t)$ und ihrer Volatilität $\sigma\,(r\,(t))$ Die Preisveränderungen sind nicht perfekt korreliert. Gibt es m Faktoren, so kennt man mit den Veränderungen der Preise von m Bonds auch die Veränderungen aller anderer Bonds.

5 Ein Bond ist ein Derivat

Definition. Unter einem **Derivat** versteht man ein Produkt, dessen Preis vom Preis anderer Produkte abhängt oder davon abgeleitet wird.

Die offensichtlichste Form von Derivaten sind Optionen. Aber auch Bonds selber sind Derivate: der Preis von jedem Bond ist abgeleitet von dem Wissen über die Short Rate $r\,(t)$, die den Basispreis beeinflusst.

6 Put-Call Parität

Betrachte europäische Call und Put Optionen mit demselben Ausübungsdatum T, und einen S-Bond als Underlying mit Preis $P(t,S)$ mit $S > T$. Sei

$p(t), c(t)$	Preis vom Put/Call zur Zeit t
K	Basispreis der Optionen

Betrachte zwei Portfolios
(A) Eine Call Option und K Einheiten vom T-Bond, $P(t,T)$
(B) Eine Put Option und eine Einheit vom S-Bond, $P(t,S)$.
A und B haben identische Auszahlungen zur Zeit T, denn:

- Der Wert von A ist $\max\{P(T,S) - K, 0\} + K = max\{P(T,S), K\}$

- Der Wert von B ist $\max\{K - P(T,S), 0\} + P(T,S) = max\{P(T,S), K\}$

Wegen dem Gesetz des einzigen Preises müssen die Werte von Portfolio A und B auch zu früheren Zeitpunkten gleich sein. Daher muss gelten:

$$c(t) + KP(t,T) = p(t) + P(t,S) \text{ „Put-Call Parität“}$$

Die Put-Call Parität sagt zwar nichts über den konkreten Wert von $p(t)$ und $c(t)$ aus, sie stellt jedoch eine Beziehung dar, der jedes Modell in einem arbitragefreien Markt genügen muss.

7 Modelltypen

Es gibt zwei Haupttypen:
1.Equilibrium und Short-Rate Modell
Equilibrium Modelle bauen auf der Funktionsweise der Ökonomie auf. Sie berücksichtigen die verschiedenen Risikopräferenzen der Anleger und versuchen ein Gleichgewicht („Equilibrium“) zwischen Angebot und Nachfrage herzustellen.
Short-Rate Modelle werden oft als Equilibrium Modell bezeichnet. Dies muss jedoch nicht immer stimmen und ist im Allgemeinen sehr schwer nachzuweisen.

2. No-Arbitrage Modell

Der Ausgangspunkt dieses Modells ist die beobachtete Zinsstruktur zum aktuellen Zeitpunkt. Zukünftige Preise entwickeln sich arbitragefrei und konsistent mit ihrer anfänglichen Preisstruktur.