Discrete - Time Binomial Models

1) Einleitung

P(t,T): Preis eines Zerobonds in t mit Fälligkeit T.
P(0,T) bekannt für T=1,2, ...
Für jede ganze Zahl t und $0 \leq s < 1$ definiere r(t+s) : = -log P(t,t+1) (F_t - messbar).
Für den Bankkontoprozess B(t) gilt: B(0) = 1

$$B(t+1) = \frac{B(t)}{P(t,t+1)} = \exp\left(\int_0^{t+1} r(s)ds\right) = \exp\left[\sum_{s=0}^{t} r(s)\right]$$

Man kann leicht ein arbitragefreies Modell für die Entwicklung der Bondpreise angeben, falls die Zinsraten deterministisch sind:
Sei der aktuelle Zinssatz r(t) := F(0,T,T+1) für $T \leq t < T+1$

$$\text{Definiere } P(t,T) := \exp\left[-\sum_{s=t}^{T-1} F(0,s,s+1)\right] = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}$$

Mit dieser Struktur wachsen die Preise der Bonds mit dem risikolosen Zinssatz und das Modell ist arbitragefrei.

2) Das Ho- und Lee No-Arbitragemodell

Zur Zeit 1 gehen die Preise entweder hoch (up) oder runter (down) im Verhältnis zur risikolosen Rendite:

$$P(1,T) = \begin{cases} u(0,T)\dfrac{P(0,T)}{P(0,1)} \text{\_\_\_\_} & if\_up \\ d(0,T)\dfrac{P(0,T)}{P(0,1)} \text{\_\_\_\_} & if\_down \end{cases}$$

Das T in u(0,T) beschreibt den ausstehenden Zeitraum bis Fälligkeit.
Wiederholung dieses Schrittes für alle zukünftigen Zeitpunkte bis T liefert:

$$P(t+1,T) = \begin{cases} u(t,T-t)\dfrac{P(t,T)}{P(t,t+1)} \text{\_\_\_\_} & if\_up \\ d(t,T-t)\dfrac{P(t,T)}{P(t,t+1)} \text{\_\_\_\_} & if\_down \end{cases}$$

Annahme: $u(t,s) \geq d(t,s)$ für alle t,s.
Vereinfachende Annahme: u(t,s) und d(t,s) hängen nicht vom bisherigen Verlauf bis t ab;
Schreibweise daher: u(s) bzw. d(s)
Aus P(t,t) = 1 folgt u(1) = d(1) = 1

Der folgende **Satz** enthält das Fundamentale Theorem vom Asset Pricing:
Betrachte alle Preisänderungen zwischen den Zeiten 0 und 1.
i) Angenommen, das Modell ist arbitragefrei. Dann gilt u(T) > 1 > d(T) für alle $T \geq 2$.
ii) Angenommen, das Modell ist arbitragefrei. Definiere q(T) = $\frac{1-d(T)}{u(T)-d(T)}$ für alle $T \geq 2$.
Dann existiert ein q, 0<q<1, sodass q(T) = q für alle $T \geq 2$.
q definiert das äquivalente Martingalmaß Q; d.h. $\Pr_Q$(up) = q , $\Pr_Q$(down) = 1-q.
iii) Angenommen, es existiert ein äquivalentes Martingalmaß Q;
d.h. ein q, sodass 0<q<1 und E_Q[P(1,T)/B(1)] = P(0,T)/B(0) für alle T.
Dann gibt es keine Arbitrage zwischen den Zeiten 0 und 1 im Binomialmodell.

Bemerkung: Da q(T) =q für alle T und 0<q<1 folgt u(T) = $\frac{1-(1-q)d(T)}{q}$.

3) Recombining Binomialmodell

Wir nehmen weiterhin an, dass gilt: u(t,T,F_t) = u(T) für alle t, F_t ; außerdem verlangen wir, dass die Preise Pfad-unabhängig sind; d.h. falls i down-steps und t-i up-steps bis zur Zeit t aufgetreten sind, hängt der Preis natürlich von der Anzahl der up- und down-steps ab, er sollte aber nicht von der Reihenfolge abhängen. Dadurch erhalten wir ein Binomialgitter statt eines –baumes.
Schreibweise: P(t,T,i), wobei i die Anzahl der down-steps zwischen 0 und t ist.
Unter diesen Voraussetzungen erhält man:
$\frac{d(T)}{u(T)}$ = k $\frac{d(T-1)}{u(T-1)}$ = k^{T-1} wobei k = $\frac{P(1,2,1)}{P(1,2,0)}$ = $\frac{d(2)}{u(2)}$.
Hieraus folgt: u(T) = $\frac{1}{(1-q)k^{T-1}+q}$ sowie d(T) = $\frac{k^{T-1}}{(1-q)k^{T-1}+q}$.

Bemerkung: In diesem Modell für u(T), d(T) gilt für die Forward-rate-Kurve:
F(t,T-1,T) = $\log \frac{P(t,T-1)}{P(t,T)}$ = F(0,T-1,T) + $\log \frac{u(T-t)}{u(T)}$ - D(t) log(k) ,
wobei D(t) = $\sum_{s=1}^{t} I(s)$ die Anzahl der down-steps ist mit
I(s) = $\begin{cases} 1\_\ falls\_down-step\_in\_s \\ 0\_\ sonst \end{cases}$

Somit ist die Größe der Zufallskomponente, D(t) log(k) , unabhängig von T.
Dieses Modell ist die Version in diskreter Zeit des Ho und Lee (1986) Modells.

Korollar: r(t) = F(t,t,t+1)
= F(0,t,t+1) - log(d(t+1)) + U(t)log(k),
wobei U(t) = t - D(t) die Anzahl der up-steps bis t ist.

Der Abstand zwischen Knoten im Binomialgitter ist also konstant: r(t,x) - r(t,x+1) = -log(k).

4) Modelle für den risikolosen Zinssatz

Wir betrachten nun folgendes Binomialmodell für den risikolosen Zinssatz:
Sei $r(t) \in A$, wobei $A = \{..., r_{-1}, r_0, r_1, r_2, ...\}$.
Für das natürliche („die Welt abbildende“) Wahrscheinlichkeitsmaß P gelte
$Pr_P\ [\ \{r(t+1) = r_{i-1} \text{ oder } r_{i+1}\} \mid r(t) = r_i\ ] = 1$ für alle t,i.
Angenommen, es gilt $P(t,t+2,r_i) = e^{-r_i}\ [q_i e^{-r_{i+1}} + (1-q_i)e^{-r_{i-1}}]$ für alle t und konstante q_i,
$0 < q_i < 1$ für alle $i \in Z$.
Dann gilt:
Satz: Für alle T = t+1, t+2, ... gilt:

$$P(t,T) = E_Q[\exp(-\int_t^T r(s)ds) \mid F_t]$$
$$= E_Q[\exp(-\sum_{s=t}^{T-1} r(s)) \mid r(t)]$$
$$= P(t,t+1)\, E_Q[P(t+1,T) \mid r(t)],$$

wobei $Pr_Q[\ r(t+1)=r_{i+1} \mid r(t)=r_i\ ] = q_i$ und $Pr_Q[\ r(t+1)=r_{i-1} \mid r(t)=r_i\ ] = 1 - q_i$.

Beispiel: Das einfachste Beispiel ist das Zufallsweg-Modell für r(t). Der Zustandsraum ist $R = \{r(0)+\delta n: n \in Z\}$, wobei δ die Größe des up- bzw. down-steps ist. Für Zeithomogenität unter Q nehmen wir an, dass die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit, dass r(t) hoch oder runter geht, konstant ist. $P(0,2) = P(0,1)\, E_Q[P(1,2) \mid r(0)]$

$$= e^{-r(0)}(qe^{-(r(0)+\delta)} + (1-q)e^{-(r(0)-\delta)}),$$
$$\Rightarrow q = \frac{e^{-(r(0)-\delta)} - P(0,2)e^{r(0)}}{e^{-(r(0)-\delta)} - e^{-(r(0)+\delta)}}.$$

Berechnung von Bond-Preisen
Angenommen, wir arbeiten mit dem Zufallsweg-Modell aus vorigem Beispiel.
Die Preise können berechnet werden, indem man sich rückwärts vom Fälligkeitstermin des Bonds vorarbeitet.
Schreibweise: P(t,T,x); (x: Anzahl der down-steps in den Bond-Preisen bis t)

Schritt1: Für jeden Zustand (t,x) sei r(t,x) der risikolose Zinssatz von t bis t+1.
Für alle $t \geq 0$ gilt $P(t,t+1,x) = \exp[-r(t,x)]$

Schritt2: gegeben P(0,2), berechne $q = \frac{e^{-(r(0,0)-\delta)} - P(0,2,0)e^{r(0,0)}}{e^{-(r(0,0)-\delta)} - e^{-(r(0,0)+\delta)}}$
(Alternativ kann q auch exogen gegeben sein)

Schritt3: Für T = 2,3, ...:
a) Definiere P(T,T,x) = 1 für alle x = 0,1, ...,T und
P(T-1,T,x) = exp[-r(t,x)] für alle x = 0,1, ..., T-1
b) Angenommen, wir kennen die Preise P(s,T,x) für alle $0 \leq x \leq s$ und s = t, t+1, ..., T.
Dann erhalten wir die Preise zur Zeit t-1 nach folgendem Schema:

Für alle x, $0 \le x \le t-1$:
P(t-1,T,x) = P(t-1,t,x) E_Q [P(t,T) | r(t-1,x)]
= $e^{-r(t-1,x)}$ [q P(t,T,x+1) + (1-q) P(t,T,x)]

c) Wiederhole b) bis t = 0.

Derivativ-Preise:

V(t,x) : Preis eines Derivativs in t, falls x up-steps im risikolosen Zinssatz.

V(T,x) = *f* [P(T,S,x)], falls der Preis eines Derivativs eine Funktion des Preises eines Zerobonds zur Zeit T, der in S > T fällig wird, ist.

Ähnlich wie bei der Berechnung der Bond-Preise erhalten wir für t = T, T-1, ...,1:
V(t-1,x) = P(t-1,t,x)[qV(t,x+1) + (1-q)V(t,x)].

Satz : Angenommen, ein Derivativ-Vertrag hat den Wert *f* [P(T,S)] zur Zeit T (T<S).
Dann ist der einzige No-Arbitrage-Preis zur Zeit t:

$$V(t) = E_Q \left[\exp\{-\int_t^T r(s)ds\}\, f(P(T,S)) \mid F_t\right]$$
$$= E_Q \left[\exp\{-\sum_{s=t}^{T-1} r(s)\}\, f(P(T,S)) \mid F_t\right]$$

5) Futures

f (t,S,T): Preis eines Futures in t mit Lieferung in S und Fälligkeit in T.
f (S,S,T) = P(S,T).
In Modellen für den Aktienmarkt mit konstanter risikoloser Zinsrate sind Forward- und Futures-Preise identisch (siehe Hull, 2000). Wenn der risikolose Zinssatz stochastisch ist, sind sie jedoch nicht gleich.
Betrachte einen Investor, der in 0 einen Futures-Vertrag gekauft hat.
Zur Zeit 0 ist der Zahlungsstrom 0,
zur Zeit t = 1, 2,...,S ist der Zahlungsstrom zum Investor *f* (t,S,T) – *f* (t-1,S,T).
Somit müssen wir *f* (t,S,T) für alle t = 0, 1, ...,S-1 so festlegen,
dass $E_Q \left[\sum_{n=t+1}^{S} \frac{B(t)}{B(n)} (f(n,S,T) - f(n-1,S,T)) \mid F_t\right] = 0$.
Das Problem der Bewertung von Futures-Preisen wird durch Rückwärtsrekursion gelöst, und man erhält *f* (t,S,T) = E_Q [*f* (t+1,S,T) | F_t].

Korollar: *f* (t,S,T) = E_Q [P(S,T) | F_t].