Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Wintersemester 08/09

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Stochastik

Blatt 11

Abgabe: 20.01.2009 nach der Vorlesung

Aufgabe 1.

Die Dichte der Standard-lognormal(r)-Verteilung, $r > 0$, ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{rx}\phi(\frac{\ln(x)}{r}) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases},$$

wobei ϕ die Dichte der $N(0,1)$-Verteilung ist.

a) Man zeige: f ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

b) Man gebe die zugehörige Verteilungsfunktion F als Funktion der Verteilungsfunktion Φ von $N(0,1)$ an.

c) Man berechne den Median dieser Verteilung.

Hinweis: Ein Median der Verteilung $\mathbb{P}_X$ von X ist eine Zahl c, für die $\mathbb{P}[X < c] \leq \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}[X \leq c] \geq \frac{1}{2}$ gilt.

Aufgabe 2.

Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängig und identisch $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt.
Es bezeichne $(X_{(1)}, ..., X_{(n)})$ eine geordnete Zufallsstichprobe: $X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$. Der Stichprobenmedian ist dann gegeben durch

$$M_n = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & n \text{ ungerade} \\ \\ \frac{1}{2}\Big(X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n+2}{2})}\Big) & n \text{ gerade} \end{cases}.$$

Man zeige, dass M_n ein konsistenter Schätzer für μ ist.

Aufgabe 3.

Seien $X_1, ..., X_n$, $n \geq 3$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, exponentialverteilt mit Parameter λ.

a) Man berechne den Maximum-Likelihood-Schätzer für $\frac{1}{\lambda}$.

b) Berechne den quadratischen Schätzfehler $\mathbb{E}\big[(\frac{1}{\hat{\lambda}} - \frac{1}{\lambda})^2\big]$ für den Maximum-Likelihood-Schätzer.

Hinweis: Die Dichte von $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ist

$$f_{\lambda,n}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 4.

Sei eine Binomialverteilung $B(n,p)$ gegeben, wobei p unbekannt ist.
Sei die apriori Dichte $f_p(\vartheta)$ gegeben durch:

$$f_p(\vartheta) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \vartheta^{a-1}(1-\vartheta)^{b-1} & \vartheta \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $a, b > 0$ (Beta-Verteilung). Bestimme die aposteriori Dichte und gebe den Bayes'schen Punktschätzer für p an.