Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. Julia Eisenberg **Wintersemester 08/09**

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Stochastik

Blatt 2

Abgabe: 04.11.2008 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Zeigen Sie die Vandermondesche Identität

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}.$$

mit kombinatorischen Argumenten.
<u>Hinweis</u>: Man stelle sich eine Urne mit m weißen und n schwarzen Kugeln vor.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $I \neq \emptyset$ eine abzählbare Indexmenge und $A_i \in \mathcal{F}$ für alle $i \in I$.
Man zeige: für alle $j \in I$ gilt $\mathbb{P}(A_j) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = 1$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilung

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r \quad (k = r, r+1, ...).$$

a) Zeigen Sie $\sum\limits_{k=r}^{\infty} \mathbb{P}[X = k] = 1$.
b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Bemerkung: Die obige Verteilung heißt “Negative Binomialverteilung”.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Es seien $k, n, t \in \mathbb{N}$ mit $k \leq t$. Eine Urne enthalte nun n Nieten und t Treffer, also insgesamt $n + t$ “Lose”. Nacheinander werden der Urne rein zufällig und ohne jeweiliges Zurücklegen Lose entnommen, bis k Treffer erreicht sind. Eine Zufallsvariable X soll die Anzahl der hierfür benötigten Züge angeben.

Man beschreibe den Wahrscheinlichkeitsraum des Experiments und bestimme $\mathbb{P}[X = i]$ für $i = 1, 2, ..., n + t$.