Prof. Dr. H. Schmidli **Wintersemester 08/09**
Dipl.-Math. Julia Eisenberg

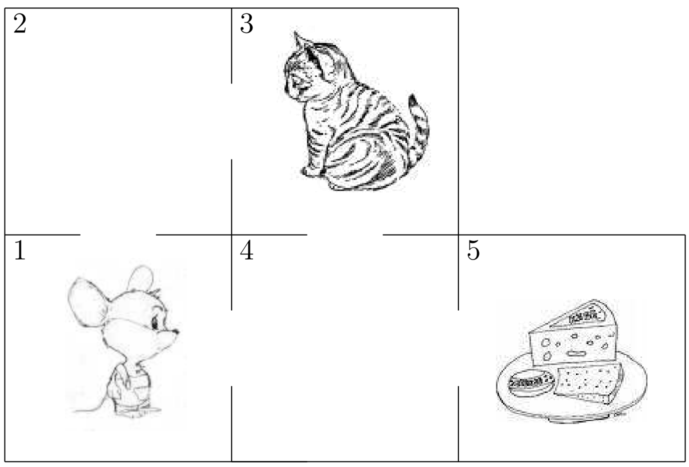
Übungen zur Vorlesung Einführung in die Stochastik

Blatt 3

Abgabe: 11.11.2008 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Wie groß sind die Gewinnchancen der Maus in dem Spiel, das durch folgende Abbildung gegeben ist?
Die Maus geht in jedem Schritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit in eins der anliegenden Zimmer, bis sie den Käse findet oder von der Katze gefressen wird.
b) Wie lange dauert die Irrfahrt im Durchschnitt?



Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei $\Omega = \{-1, 1\}^N$ die Menge der Elementarereignisse der Irrfahrt. Wir definieren $\mathcal{F}_k$, $k \in \{0, 1, 2, ..., N\}$ wie in der Vorlesung.

a) Sei $N = 3$. Bestimmen Sie $\mathcal{F}_2$.

b) Sei N beliebig. Zeigen Sie für $A,\ B \in \mathcal{F}_n$, dass auch $A \cap B \in \mathcal{F}_n$, $A \cup B \in \mathcal{F}_n$, $A^c \in \mathcal{F}_n$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

2 Spieler A und B spielen mehrere Runden eines Glücksspiels bei dem A die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und B die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ hat. Der Verlierer zahlt jeweils 1 Euro an den Gewinner.
A und B beginnen mit 1 bzw. 2 Euro Startkapital und spielen solange, bis einer pleite ist und der andere 3 Euro hat.

Wie groß sind die Gewinnchancen für A, und wie lange dauert das Spiel im Durchschnitt?

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Wir betrachten eine Irrfahrt $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ mit $X_i \in \{-1, 1\}$ und

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_N] = p^{(N+\sum\limits_{i=1}^{N} x_i)/2}(1-p)^{(N-\sum\limits_{i=1}^{N} x_i)/2},$$

für $p \in (0,1)$, $p \neq \frac{1}{2}$.

a) Berechnen Sie $\mathbb{P}[S_N = k]$.

b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[(\frac{1-p}{p})^{S_N}]$.

c) Definieren Sie $\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}[I_A \cdot \alpha^{-N} \cdot (\frac{1-p}{p})^{S_N/2}]$ mit $\alpha = \sqrt{4p(1-p)}$.
Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^*$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist und berechnen Sie

$$\mathbb{P}^*[X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_N = x_N].$$