Prof. Dr. H. Schmidli **Wintersemester 08/09**
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Stochastik

Blatt 5

Abgabe: 25.11.2008 nach der Vorlesung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Ein idealer Würfel werde viermal geworfen. X_i gebe die Augenzahl beim i-ten Wurf an ($i = 1, 2, 3, 4$). Dabei werden die Zufallsvariablen als unabhängig vorausgesetzt.
Weiter seien $Y_i = \max\{X_i, X_{i+1}\}$ für $i = 1, 2, 3$.

a) Man bestimme $\mathbb{P}[Y_i = k]$ für $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $i = 1, 2, 3$.

b) Man prüfe, ob Y_1, Y_2 unabhängig sind .

c) Man berechne $\mathbb{P}[Y_1 = Y_2]$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Eine Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $X(\Omega) = \mathbb{N}_0$ heißt Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$ (kurz $P(\lambda)$-verteilt, siehe Zusatzblatt und S. 35 des Skriptes), wenn

$$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Für unabhängige $P(\lambda_i)$-verteilte Zufallsvariablen X_i, $i \in \{1, ..., n\}$, bestimme man die Verteilung von $X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dabei sei X_i $P(\lambda_i)$-verteilt $(i = 1, 2, .., n)$. Für $k \in \{1, 2, ..., n\}$ und $m \in \mathbb{N}$ bestimme man die bedingte Verteilung von $Y_k := \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ unter der Bedingung $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m$, d.h. für jedes $j \in \mathbb{Z}$ sind die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[Y_k = j | \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = m]$ zu bestimmen.
Die Verteilung soll benannt werden.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Eine Urne enthält zwei Münzen, eine mit Erfolgswahrscheinlichkeit p_1 und eine mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p_2 \neq p_1$. Wir ziehen zufällig eine dieser Münzen und werfen N Mal. Als Wahrscheinlichkeitsraum wählen wir $\Omega = \Big\{(k, x_1, ..., x_N) : \ k \in \{1, 2\}, \ x_i \in \{0, 1\}\Big\}$.
$\omega = (k, x_1, ..., x_N)$ bedeutet "die k-te Münze wird gezogen und die Ergebnisse $x_1, ..., x_N$ erzielt". Die Gewichte legen wir also fest durch:

$$
\begin{aligned}
p(\omega) &= \frac{1}{2} \cdot p_1^{\sum_i x_i} \cdot (1 - p_1)^{N - \sum_i x_i} \quad \text{für} \quad k = 1\,, \\
p(\omega) &= \frac{1}{2} \cdot p_2^{\sum_i x_i} \cdot (1 - p_2)^{N - \sum_i x_i} \quad \text{für} \quad k = 2\,.
\end{aligned}
$$

Sei weiter A_i das Ereignis "beim i-ten Wurf eine 1".

a) Berechnen Sie $\mathbb{P}[A_1 \cap ... \cap A_j]$ für $1 \leq j \leq N$.
Hinweis: Aufgrund der Gewichte sind A_i gegeben k unabhängig.

b) Berechnen Sie mit der Formel von Bayes:
$\mathbb{P}[1.\ \text{Münze gezogen} | A_1 \cap ... \cap A_N]$
und bilden Sie den Grenzwert für $N \to \infty$.