Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Wintersemester 08/09

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Stochastik

Blatt 7

Abgabe: 9.12.2008 nach der Vorlesung

Aufgabe 1.

Gegeben sei folgende Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\,.$$

a) Berechnen Sie die kleinstmöglichen Intervallgrenzen, damit $f(x)$ eine gültige Dichtefunktion darstellt.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert.

Aufgabe 2.

Es sei X gleichverteilt auf $[0, 2]$. Man bestimme die Verteilungsfunktion von $Y = X(2 - X)$. Besitzt die Verteilung Y eine Dichte?

Aufgabe 3.

Sei Y eine nichtnegative Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie

a) $\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty (1 - F(y))\,\mathrm{d}\,y$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[Y > k+1] \leq \mathbb{E}[Y] \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[Y > k]$.

Aufgabe 4.

1. $X_1, ..., X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F.

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktionen von $\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ und $\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.

b) Sei F absolutstetig mit Dichtefunktion f.
Berechnen Sie die Dichtefunktion von $\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ und $\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.

c) Berechnen Sie die gemeinsame Verteilung von $\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ und $\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$,
also $\mathbb{P}[\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i \leq x, \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i \leq y]$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Seien nun $X_1, ..., X_n$ unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[\min\limits_{1\leq i\leq n} X_i]$ und $\mathbb{E}[\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i]$.