Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Wintersemester 08/09

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Stochastik

Blatt 8

Abgabe: 16.12.2008 nach der Vorlesung

Aufgabe 1.

Das Intervall $[0,1]$ werde durch eine auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable in zwei Teile geteilt. K sei die Länge des kürzeren und L die Länge des längeren Teilintervalls. Man berechne

a) $\mathbb{E}[K]\,,\mathbb{E}[L]$ *b*) $\mathrm{Var}[K]\,,\mathrm{Var}[L]$ *c*) $\mathrm{Cov}[K,L]\,.$

Aufgabe 2.

1. Es sei X eine reelle Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ mit streng monotoner Verteilungsfunktion F. Man setze $Y=F(X)$ und bestimme die Verteilung von Y.

2. Sei Z gleichverteilt auf $[0,1]$. Setze $Y:=G(Z)$ und berechne die Verteilung von Y, falls

$$
\begin{aligned}
&a) \qquad G(x) = -\ln(x)\frac{1}{\lambda}, \quad 1\ge x>0,\ \lambda>0\,,\\
&b) \qquad G(x) = \frac{a}{x^{1/b}} - a, \quad a,b>0,\ 1\ge x>0\,,\\
&c) \qquad G(x) = \left(\frac{\ln(x)}{-a}\right)^{\frac{1}{b}} \quad a,b>0,\ 1\ge x>0\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.

Man zeige allein mit Hilfe der Exponentialreihe: Ist X eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, so gilt

$a)$ $\mathbb{P}[|X| \leq 2] \geq 0,95$ $\qquad$ $b)$ $\mathbb{P}[|X| \geq 2,6] \leq 0,01$.

Aufgabe 4.

Seien X und Y Zufallsvariablen mit geimensamer Dichte $f(x,y) = \frac{\alpha^2}{x} y^{-\alpha-1} \mathbb{1}_{[1 \leq x \leq y]}$, $\alpha > 0$.

$a)$ Zeige, dass $f(x,y)$ tatsächlich eine Dichte ist ;

$b)$ Berechne die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen $W := \ln(X)$ und $Z := \ln(\frac{Y}{X})$. Sind Z und W unabhängig? .