Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Wintersemester 08/09

Übungen zur Vorlesung Einführung in die Stochastik

Blatt 9

Abgabe: 7.01.2009 nach der Vorlesung

Aufgabe 1.

Es seien X, Y unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y]$.

a) Man zeige: Es sind auch $X + Y$ und $X - Y$ unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen.

b) Man prüfe, ob die Voraussetzung $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y]$ entbehrlich ist.

Aufgabe 2.

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. Setze $Y_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])$, $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genügt genau dann dem schwachen Gesetz der grossen Zahl, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{Y_n^2}{1 + Y_n^2}\Big] = 0\,.$$

Aufgabe 3.

Es seien $a > 0$ und $X_1, X_2, ...$ unabhängige auf $[0, a]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Ferner seien $Y_n := n \cdot \min\{X_1, ..., X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Man prüfe, ob die Verteilungen von Y_n schwach konvergent (konvergent in Verteilung) sind und gebe im Falle der Konvergenz das Grenzmaß an.

Aufgabe 4.

Es seien X, Y unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Für $r > 0$ bestimme man $\mathbb{P}[|X| + |Y| \leq r]$.
Man gebe die konkreten Werte für $r = 1, 2, 3$ an.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!