Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. Julia Eisenberg **Sommersemester 2009**

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 1

Abgabe: in der Übung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Konstruieren Sie ein Beispiel für eine σ-Algebra $\mathcal{F}$ und ein Maß μ, so dass es Mengen A_i gibt mit $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset$ und $A_1 \supset A_2 \supset ...$, aber $\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) \neq 0$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{F}$ eine unendliche σ-Algebra in Ω. Folglich gibt es eine Folge paarweise verschiedener, nicht-leerer Mengen $A_1,\ A_2,.. \in \mathcal{F}$. Hiermit bilde man das System

$$\mathcal{G} := \Big\{ \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i : B_i \in \{A_i, \Omega\backslash A_i\} \ \text{ für alle } \ i \in \mathbb{N} \Big\} \ .$$

Man zeige:

a) Jedes A_n lässt sich als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{G}$ schreiben.

b) $\mathcal{G}$ enthält unendlich viele paarweise disjunkte Mengen.

c) $\mathcal{F}$ hat nicht die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, d.h. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$. Sei weiter $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, eine unabhängige Familie von Systemen $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{F}$. D.h. es gilt

$$\mathbb{P}\big(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}\big) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k})$$

für jede Wahl $\{i_1, ..., i_k\} \subset I$ und jede Wahl von Ereignissen $A_{i_l} \in \mathcal{E}_{i_l}$.
Man zeige, dass

$$D := \big\{E \in \mathcal{F} : (\{E\}, \mathcal{E}_2, ..., \mathcal{E}_n) \ \text{ unabhängige Familie}\big\}$$

ein Dynkin-System ist.