Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 10

Abgabe: 01.07.09 bzw. 02.07.09 in der Übung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Seien $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ iid Zufallsvariablen mit $\operatorname{Var}[Y_i] > 0$. Nehmen wir an, es gibt ein Intervall $(a,b), a \neq b$, so dass $\psi(s) = \mathbb{E}[e^{sY_i}] < \infty$ für $s \in (a,b)$. Wir betrachten $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Zeigen Sie:

1. Für jedes $s \in (a,b)$ ist der Prozess
$$Z_n^s = \exp\{sS_n - n\log\psi(s)\}$$
ein Martingal.
2. Es gilt $\lim_{n\to\infty} Z_n^s = 0$ für $s \neq 0$.
3. Ist $\{Z_n^s\}$ gleichmäßig integrierbar?

Aufgabe 2. (4 Punkte) Zeigen Sie:

1. Ist X eine Zufallsvariable mit $|X| \leq 1$ f.s., so gibt es eine Zufallsvariable Y mit Werten in $\{-1,+1\}$ und mit $\mathbb{E}[Y|X] = X$.
2. Für X wie in a) mit $\mathbb{E}[X] = 0$ folgern Sie (mit Hilfe der Jensen'schen Ungleichung)
$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] \leq \cosh(\lambda) \leq e^{\lambda^2/2} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Ist $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal mit $M_0 = 0$, und gibt es eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer Zahlen mit $|M_n - M_{n-1}| \leq c_n$ f.s. für jedes $n \in \mathbb{N}$, so gilt
$$\mathbb{E}[e^{\lambda M_n}] \leq \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2\right).$$
Hinweis: In a) kann man Y so wählen, dass $\mathbb{E}[Y|X,\mathcal{G}] = X$ für eine σ-Algebra $\mathcal{G}$.

4. Unter den Bedingungen von c) gilt die **Ungleichung von Azuma**
$$\mathbb{P}[|M_n| \geq \lambda] \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right) \quad \text{für alle } \lambda \geq 0.$$
Hinweis: Verwenden Sie die Markov'sche Ungleichung für $f(x) = e^{\gamma x}$ und wählen Sie γ optimal.

Am 26.6.09 veranstaltet die Fachschaft wieder ein großes Sommerfest! Auf dem Parkplatz des Mathematischen Instituts wird ab 18 Uhr gegrillt und fuer Getraenke ist auch gesorgt. Ihr seid herzlich eingeladen, wir freuen uns auf Euch!