Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg **Sommersemester 2009**

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 11

Abgabe: 08.07.09 bzw. 09.07.09 in der Übung

Aufgabe 1. (8 Punkte)

a) Sei $r > 0$ und $g(x)$ eine endliche fallende Funktion, so dass $\int_0^\infty e^{rx}|g(x)|\,\mathrm{d}y < \infty$. Wir wollen zeigen, dass $z(x) = e^{rx}g(x)$ direkt Riemann integrierbar ist. Zeigen Sie, dass für $h > 0$

$$e^{-2rh}\int_h^\infty e^{rx}g(x)\,\mathrm{d}x \le \underline{\sigma}(h) \le \overline{\sigma}(h) \le e^{2rh}\int_0^\infty e^{rx}g(x)\,\mathrm{d}x + he^{rh}g(0)\ ,$$

und schliessen Sie, dass $z(x)$ direkt Riemann integrierbar ist.

Hinweis: Schätzen Sie $\sup\{z(t) : (k-1)h \le t < kh\}$ und $\inf\{z(t) : (k-1)h \le t < kh\}$ nach oben bzw. nach unten ab.

Definiere $B(t) := T_{N_t+1} - t$ und $f(t) := \mathbb{E}[e^{rB(t)}]$ für ein $r \ge 0$ und nehme an, dass die Verteilung von Y_i nicht arithmetisch ist.

b) Zeige, dass $f(t)$ eine Erneuerungsgleichung erfüllt.

c) Finde $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Betrachte den Prozess

$$C_k = u + ck - \sum_{i=1}^{N_k} Z_i\ , \quad k \ge 1\ .$$

Wobei:
∘ N_t ist ein Erneuerungsprozess. D.h. für iid Zufallsvariablen Y_i mit

$T_n = T_{n-1} + Y_n$ zählt N_t die Anzahl der Erneuerungen bis t. Wir setzen $\mathbb{E}[Y_1] = \lambda$;
- ∘ $\{Z_i\}$ sind iid Zufallsvariablen mit Verteilungsfuktion G, $\mu = \mathbb{E}[Z_i]$;
- ∘ $\{N_t\}$ und $\{Z_i\}$ sind unabhängig.

Berechne $\lim_{k\to\infty} C_k$, falls $c > \lambda\mu$ bzw. $c < \lambda\mu$.
Beschreibe das langfristige Verhalten des Prozesses C_k, falls $c = \lambda\mu$.