Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 2

Abgabe: 29.04.09 bzw. 30.04.09 in der Übung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Es sei $\Omega = [0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1))$ und μ das Lebesguemass. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \left[0, \frac{1}{2^n}\right) \cup \left[\frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right) \cup ... \cup \left[\frac{2^n-2}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}\right) .$$

Man zeige, dass $\mu(A_n \cap A_{n+1}) = \mu(A_n) \cdot \mu(A_{n+1})$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$. Man zeige:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) > (n-1)\mu(\Omega) \;\Rightarrow\; \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset .$$

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei F eine stetige, monoton wachsende Funktion und μ das zugehörige Stieltjesmass.

a) Zeige, dass $\mu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Zeige, dass abzählbare Mengen das Maß 0 haben .

c) Wenn eine Menge positives Maß hat, muss sie dann ein nichtleeres, offenes Intervall enthalten?

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega', \mathcal{F}')$ und $(\Omega'', \mathcal{F}'')$ messbare Räume; $f := \Omega \to \Omega'$ und $f' := \Omega' \to \Omega''$ beliebige Abbildungen.
Man zeige:

a) $\mathcal{A} := \{f^{-1}(A): \ A \in \mathcal{F}'\}$ ist eine σ-Algebra.

b) Ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}'$ mit $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{F}'$, dann ist f genau dann messbar, wenn $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

c) Sind f und f' messbar, so ist auch $f' \circ f$ messbar.