**Prof. Dr. H. Schmidli**
**Dipl.-Math. J. Eisenberg** **Sommersemester 2009**

## Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

### Blatt 4

Abgabe: 13.05.09 bzw. 14.05.09 in der Übung

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)

Seien für $i \in \mathbb{N}$ die Abbildungen $f_i := \Omega \to \mathbb{R}$, $f_i \geq 0$ und $\mathcal{F}$, $\mathcal{B}$ (Borel)-messbar auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.
Man zeige:

$$\int \Big( \sum_{i=1}^{\infty} f_i \Big) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, \mathrm{d}\mu \, .$$

**Aufgabe 2.** (4 Punkte)

Es seien $f$,$g$ reelle, $\mathcal{F}$, $\mathcal{B}$ (Borel)-messbare Abbildungen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Man zeige:

*a*) Die Integrierbarkeit von $f + g$ impliziert i.a. nicht die Integrierbarkeit von $f$ und $g$.

*b*) Sind die Familien $\{f^{-1}(A) \ : \ A \in \mathcal{B}\}$ und $\{g^{-1}(A) \ : \ A \in \mathcal{B}\}$ unabhängig, so folgt aus der Integrierbarkeit von $f + g$ die Integrierbarkeit von $f$ und $g$.

**Hinweis:** $\{f^{-1}(A) \ : \ A \in \mathcal{B}\}$ und $\{g^{-1}(A) \ : \ A \in \mathcal{B}\}$ unabhängig heisst:

$$\mathbb{P}\big[A_1 \cap A_2\big] = \mathbb{P}[A_1] \cdot \mathbb{P}[A_2]$$

für jede Wahl von Ereignissen $A_1 \in \{f^{-1}(A) \ : \ A \in \mathcal{B}\}$ und $A_2 \in \{g^{-1}(A) \ : \ A \in \mathcal{B}\}$.

**Aufgabe 3.** (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, und sei $\nu$ ein endliches Maß mit der Dichte $f$ bzgl. $\mu$ ($\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \nu(A)$).
Man zeige: für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so dass, für $A \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mu(A) < \delta \;\Rightarrow\; \nu(A) < \epsilon \,.$$

**Aufgabe 4.** (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ W-Maße (d.h. $\mathbb{P}_1[\Omega] = \mathbb{P}_2[\Omega] = 1$) auf $\mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}_i[A] = \int_A f_i \,\mathrm{d}\mu$ für $i = 1, 2$.
Man zeige:

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} \big|\mathbb{P}_1[A] - \mathbb{P}_2[A]\big| = \frac{1}{2} \int |f_1 - f_2| \,\mathrm{d}\mu \,.$$

**Hinweis:** Man zeige zunächst: Ist $g$ integrierbar mit $\int g \,\mathrm{d}\mu = 0$, so gilt $\int |g| \,\mathrm{d}\mu = 2 \int g^+ \,\mathrm{d}\mu = 2 \int g^- \,\mathrm{d}\mu$.