Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 5

Abgabe: 20.05.09 in der Übung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei Ω eine überabzählbare Menge und

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega : \ A \text{ ist abzählbar oder } \Omega \backslash A \text{ ist abzählbar}\} .$$

Auf $\mathcal{F}$ seien Maße μ und ν wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \begin{cases} 0 & : \text{ falls } A \text{ abzählbar} \\ \infty & : \text{ falls } \Omega\backslash A \text{ abzählbar} . \end{cases} \\
\nu(A) &= \begin{cases} |A| \text{ (Anzahl der Elemente in } A) & : \text{ falls } A \text{ endlich} \\ \infty & : \text{ sonst} . \end{cases}
\end{aligned}$$

a) Besitzt μ eine Dichte bzgl. ν?

b) Ist μ absolutstetig bzgl. ν?

c) Warum stehen die Antworten in a) und b) nicht im Widerspruch zum Satz von Radon-Nikodym?

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Seien $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = 2^{\mathbb{N}}$ (Potenzmenge von $\mathbb{N}$) σ-Algebren und $\nu_1 = \nu_2$ Zählmaße auf der Potenzmenge $2^{\mathbb{N}}$. Die Zufallsgröße $X : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$X(\omega_1, \omega_2) := \begin{cases} -1 & : \text{ falls } \omega_2 = \omega_1 + 1 \\ 0 & : \text{ falls } \omega_2 \notin \{\omega_1, \omega_1 + 1\} \\ 1 & : \text{ falls } \omega_2 = \omega_1 \end{cases}$$

Berechne die beiden Integrale

$$\int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} X(\omega_1, \omega_2) \, \mathrm{d}\nu_2(\omega_2) \Big) \, \mathrm{d}\nu_1(\omega_1)$$
$$\int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} X(\omega_1, \omega_2) \, \mathrm{d}\nu_1(\omega_1) \Big) \, \mathrm{d}\nu_2(\omega_2) \, .$$

Warum ist in diesem Fall der Satz von Fubini nicht anwendbar?

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Eine reelle Zufallsvariable X soll "symmetrisch verteilt" heißen, wenn $\mathbb{P}[X \in B] = \mathbb{P}[X \in -B]$ für alle $B \in \mathcal{B}$ (Borel σ-Algebra). Dabei sei $-B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in B\}$.

a) Man prüfe, ob folgendes gilt:

X symmetrisch verteilt $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}[0 \leq X \leq a] = \mathbb{P}[-a \leq X \leq 0]$ für alle $a > 0$.

b) Man zeige: X symmetrisch verteilt $\Leftrightarrow$ φ_X (charakteristische Funktion) ist reell.