Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg **Sommersemester 2009**

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 6

Abgabe: 27.05.09 bzw. 28.05.09 in der Übung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei $\{X_n\}_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}[X_n = -n] = \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{2n\ln(n)} \ , \quad \mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n\ln(n)} \ .$$

a) Genügt die Folge $\{X_n\}_{n\geq 2}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahl?

b) Genügt die Folge $\{X_n\}_{n\geq 2}$ dem starken Gesetz der großen Zahl?

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Kann man aus $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ f.s. auf die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X und Y schließen?
Begründe deine Antwort.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Seien μ_1 und μ_2 Maße auf $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ und $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß auf $\big(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\big)$. Der Zufallsvektor (X, Y) ist absolutstetig bzgl. μ mit Dichte $f(x, y)$.
a) Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Berechne $\mathbb{P}[X \in A|Y]$.
b) Zeige, dass $X|Y$ (X bedingt auf Y) absolutstetig bzgl. μ_1 ist, und bestimme eine Dichte.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängig und standard normalverteilt. Sei weiter N eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Prameter λ und unabhängig von X_i. Berechne die Momentenerzeugende Funktion der Zufallsvariablen

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \ .$$