Prof. Dr. H. Schmidli **Sommersemester 2009**
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 7

Abgabe: 10.06.09 in der Übung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ eine Stoppzeit zu $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seien $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_n$-messbar für jedes $n \in \mathbb{N}$ und S_∞ sei $\mathcal{F}_\infty := \sigma\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\Big)$-messbar. Setze

$$S_\tau(\omega) := S_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \text{für} \quad \omega \in \Omega\ .$$

Dann ist $S_\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}_\tau$-messbar.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei $x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge. Setze $S_n(\omega) := x_n$ für alle $\omega \in \Omega$. Man zeige mit $\mathcal{F}_n := \{\emptyset, \Omega\}$:

S_n, $n \in \mathbb{N}$ ist ein Martingal $\Leftrightarrow$ x_n, $n \in \mathbb{N}$ ist konstant,

S_n, $n \in \mathbb{N}$ ist ein Submartingal $\Leftrightarrow$ x_n, $n \in \mathbb{N}$ ist monoton wachsend.

Gebe ein Beispiel für ein Submartingal an, welches kein Martingal ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Es sei $X_0 = 0$ f.s. und für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte

$$\mathbb{P}[X_{k+1} = 1 | X_k = 0] = \mathbb{P}[X_{k+1} = -1 | X_k = 0] = \frac{1}{2(k+1)}\ ,$$

$$\mathbb{P}[X_{k+1} = 0 | X_k = 0] = 1 - \frac{1}{k+1}\ ,$$

$$\mathbb{P}[X_{k+1} = (k+1) \cdot X_k | X_k \neq 0] = \frac{1}{k+1} = 1 - \mathbb{P}[X_{k+1} = 0 | X_k \neq 0]\ .$$

a) Zeige, dass es sich bei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um ein Martingal bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ handelt, wobei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$.

b) Konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Wahrscheinlichkeit (stochastisch)?

c) Konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher?

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Wir haben eine Urne mit einer roten und einer schwarzen Kugel. Wir ziehen eine Kugel und legen dann zwei der gleichen Farbe zurück.
Es bezeichne k_n die Anzahl der roten Kugeln in der Urne nach dem n-ten Zug, $k_0 = 1$. Nach dem $n+1$ Zug hat man dann

$$k_{n+1} = \begin{cases} k_n + 1 & : \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } \; p_n = \frac{k_n}{n+2} \\ k_n & : \quad \text{mit Wahrscheinlichkeit } \; 1 - p_n = \frac{n+2-k_n}{n+2} \end{cases}$$

a) Zeige, dass der Prozess $\{p_n\}$ ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration ist.
b) Zeige, dass $p_n \to p_\infty$ für eine ZV $p_\infty \in (0,1)$.

Bemerkung: $0 \in \mathbb{N}$