Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 8

Abgabe: 17.06.09 bzw. 18.06.09 in der Übung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{N}$. Ist dann

$$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\max\{S_n, -c\})_{n\in\mathbb{N}}$$

auch ein Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Aufgabe 2. (8 Punkte)

Seien $\{Y_i : i \in \mathbb{N}\}$ iid und $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, $S_0 = 0$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{E}[Y_i] < 0$, so dass $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$. Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left[\sup_n S_n > u\right].$$

Sei nun $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

1. Sei $g(r) = \mathbb{E}[e^{rY_1}]$.
   Zeige: es gibt höchstens zwei Lösungen der Gleichung $g(r) = 1$. Für die zweite Lösung R gilt $R > 0$.
2. Nehmen wir nun an, $R > 0$ existiert. Zeige: $\{e^{RS_n}\}$ ist ein Martingal.
3. Sei $\tau_u = \inf\{n : S_n > u\}$. Zeige: $\mathbb{P}[\tau_u \le n] \le e^{-Ru}$.
4. Schließe, $\psi(u) \le e^{-Ru}$.

5. Zeige die Formel
$$\psi(u) = \frac{1}{\mathbb{E}[e^{RS\tau_u} | \tau_u < \infty]}.$$
Hinweis: Benutze die Sätze von der monotonen und beschränkten Konvergenz.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei X_1 eine auf dem Intervall $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Gegeben $X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}$ sei X_n gleichverteilt auf dem Intervall $(0, x_{n-1})$. Zeige:

a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Supermartingal mit $\mathbb{E}[X_n] = 2^{-n}$.

b) X_n konvergiert gegen 0 $\mathbb{P}$-f.s.