Prof. Dr. H. Schmidli
Dipl.-Math. J. Eisenberg

Sommersemester 2009

Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 9

Abgabe: 24.06.09 bzw. 25.06.09 in der Übung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein nichtnegatives Submartingal und $\alpha > 0$. Zeige: Für alle $p \geq 1$ ist

$$\alpha^p \mathbb{P}[\sup_{1\leq n\leq m} X_n \geq \alpha] \leq \mathbb{E}[X_m^p] \, .$$

Aufgabe 2. (4 Punkte)

1. Sei $\{(X_n, \mathcal{F}_n)\}_{n\geq 1}$ ein Submartingal und $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ monoton wachsend und konvex. Zeige: Sind alle $h(X_n)$ integrierbar, so ist $\{(h(X_n), \mathcal{F}_n)\}_{n\geq 1}$ ein Submartingal.
2. Fordert man im Teil a), dass $\{(X_n, \mathcal{F}_n)\}_{n\geq 1}$ ein Martingal ist, so kann man auf die Monotonie von h verzichten.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Seien $Y_n \geq 0$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y_n] = 1$ und $X_n := \prod_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Zeige, dass $\{(X_n, \mathcal{F}_n^X)\}$ ein Martingal ist, welches fast sicher gegen eine integrierbare Zufallsvariable X konvergiert.

2. Es gelte zusätzlich $\mathbb{P}[Y_n = \frac{1}{2}] = \mathbb{P}[Y_n = \frac{3}{2}] = \frac{1}{2}$. Zeige: $\mathbb{P}[X = 0] = 1$. Insbesondere gilt: $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{\infty} Y_i] \neq \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_i]$.

   Hinweis: $X_n = \frac{3^{S_n}}{2^n}$ mit $S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_i = \frac{3}{2}\}}$

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Deutsche Männer haben 0 Söhne mit Wahrscheinllichkeit $p_0 = 0.482$; und k Söhne mit Wahrscheinlichkeit $p_k = 0.213 \cdot 0.589^{k-1}$ mit $k \geq 1$.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit stirbt der männliche Zweig einer Familie aus?