Einführung in die Stochastische Analysis

Thorsten Maaß

7. November 2006

1 Wiederholung:

1.1 Definition 1: n-dimensionale Normalverteilung

Sei $X = (X_1,...,X_n)$ ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit $E[X_i] = \mu_i$ und $Cov[X_i,X_j] = v_{ij}$ für i,j = 1,...,n. Sei $\mu = (\mu_1,...,\mu_n)$ und $V = (v_{ij})_{i,j=1,...,n}$ die n x n Kovarianzmatrix. Ist V invertierbar, so hat X eine n-dimensionale Normalverteilung mit Mittelwert μ und Kovarinazmatrix V, wenn X die Dichte

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt{(((2\pi)^n)\,det(V))})}\exp\left[\frac{1}{2}\langle(x-\mu)|V^{-1}(x-\mu)\rangle\right]$$

hat. Man schreibt $X \sim \mathcal{N}(\mu,V)$

1.2 Bemerkung 1: Eigenschaften der n-dimensionale Normalverteilung

a) Wenn V invertierbar ist, dann ist V symmetrisch und positiv definit.
b) Die n-dimensionale Laplace – Transformation von X ist:

$$l_x(x)=E[\mathrm{e}^{-\langle r|X\rangle}]=\mathrm{e}^{[-\langle r|X\rangle+1/2\langle r|Vr\rangle]}$$

c) Wenn V invertierbar ist, dann gibt es eine untere Dreiecksmatrix S, so dass $V = SS^T$ (Cholesky - Zerlegung).

d) Wenn V invertierbar ist, kann man schreiben:

$$X = \mu + SZ \; mit \; Z = (Z_1,...,Z_n), \text{ mit } Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$$

1.3 Definition 2: Markovprozess

Ein stochastischer Prozess $\{X(t)|t\geq 0\}$ heißt Markovprozess, falls für alle $t \geq s$ gilt:

$$P[X(t)|\sigma(\{X(u)|s\geq u\geq 0\})]=P[X(t)|\sigma(X(s))]$$

2 Brownsche Bewegung

2.1 Definition 3: Standard Brownsche Bewegung

Ein stochastischer Prozess $\{W(t)|t\geq 0\}$ heißt Standard Brownsche Bewegung, falls:

a) $W(0) = 0$
b) $\{W(t)|t\geq 0\}$ hat unabhängige stationäre Zuwächse
c) $\{W(t)|t\geq 0\} \sim \mathcal{N}(0,t)$
d) $\{W(t)|t\geq 0\}$ hat stetige Pfade

2.2 Definition 4: n-dimensionale Standard Brownsche Bewegung

Ein n-dimensionaler stochastischer Prozess $\{W(t)|t\geq 0\} = \{(W_1(t),...,W_n(t))|t\geq 0\}$ heißt n-dimensionale Standard Brownsche Bewegung, falls alle $\{W_i(t)|t\geq 0\}$ Standard Brownsche Bewegungen sind und untereinander unabhängig.

Sei $\{W(t)|t\geq 0\}$ eine Standard Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},P)$, wobei $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W(s)|0\leq s\leq t\})$ die von $\{W(s)|s\geq 0\}$ bis t erzeugte σ-Algebra sei. Dann können wir folgende Aussagen über Brownsche Bewegungen machen:

2.3 Bemerkung 2: normalverteilte Zuwächse

Die Zuwächse von $\{W(t)|t\geq 0\}$ sind normalverteilt, das heißt für s≤t gilt:
$\{W(t\text{-}s)|t\geq s\geq 0\} \sim \mathcal{N}(0,t\text{-}s)$

2.4 Satz 1: Brownsche Bewegungen und Martingale

Die folgenden Prozesse sind Martingale

i) $\{W(t)|t\geq 0\}$
ii) $\{W(t)^2 - t|t\geq 0\}$
iii) $\{exp[rW(t) - ½r^2t|t\geq 0\}$

2.5 Satz 2: Markovprozess

Brownsche Bewegungen sind Markovprozesse

2.6 Satz 3: Brownsche Bewegung

Für jedes $h\geq 0$ ist $\{W(t+h) - W(h)|t\geq 0\}\}$ eine Brownsche Bewegung

2.7 Satz 4: Differenzierbarkeit

$\{W(t)|t\geq 0\}$ ist nirgends differenzierbar.
Insbesondere ist für gegebenes $W(t) = w$ und $\varepsilon>0$

$$A = \{t\leq s\leq t+\varepsilon|W(s) = w\} \neq \emptyset,$$

das heißt $\{W(s)|t\leq s\leq t+\varepsilon\}$ besucht w unendlich oft für alle $\varepsilon>0$.

3 Itô-Integral

Sei (Ω,F,P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W(s)|s\leq t) \otimes \mathcal{B}([0,t])$ die von den Pfaden $\{W(s,\omega)|s\geq 0\}$ bis t erzeugte σ-Algebra. Sei weiter $\{X(t)|t\geq 0\}$ ein beliebiger an $\mathcal{F}_t$ adaptierter Prozess.
Ziel ist es nun das Integral

$$\int_0^T X(t)\,dW(t),\quad mit\; dW(t)=W(t+dt,\omega)-W(t,\omega)\quad für\, kleine\, dt$$

sinnvoll zu definieren.
Ähnlich wie in der Analysis bzw. der Maßtheorie definieren wir das Integral zunächst für Elementarfunktionen.

3.1 Definition 5: Itô-Integral für Elementarfunktionen

Sei

$$h:[0,\infty)\times\Omega\rightarrow\mathbb{R} \overset{\text{def}}{=} h_t(\omega) \overset{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\omega)\, 1_{[t_i,t_{i+1}]}(t)$$

eine Elementarfunktion mit $\mathcal{F}_{t_i}$ messbaren α_i, das heißt h ist messbar.
Dann definieren wir das Itô Integral von h durch

$$\int_0^T h(t,\omega)\,dW(t,\omega) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\omega)((W(t_{i+1},\omega)-W(t_i,\omega)))$$

3.2 Notation 1: L^2 (0,T)

Wir definieren

$$L^2(0;T) \overset{\text{def}}{=} \left\{ g:(0,T)\times\Omega\rightarrow\mathbb{R},(t,\omega)\rightarrow g(t,\omega) \,\middle|\, g\, ist\, adaptiert\, an\, \mathcal{F}_t\, und\, E\left[\int_0^T g(t,\omega)^2\,dt\right]<\infty \right\}$$

3.3 Lemma 1: Annäherung von quadratisch integrierbaren Funktionen

Zu jedem $g\in L^2\,(0,T)$gibt es eine Folge von Elementarfunktionen $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2$ $(0,T)$, so dass

$$E\left[\int_0^T (g(t,\omega)-h_n(t,\omega))^2\,dt\right]\rightarrow 0, n\rightarrow\infty$$

3.4 Definition 6: Itô Integral für quadratisch integrierbare Funktionen

Nun können wir das Itô-Integral für $g\in L^2\,(0,T)$ definieren:

$$\int_0^T g(t,\omega)\,dW(t,\omega) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\rightarrow\infty}\int_0^T h_n(t,\omega)\,dW(t,\omega)$$

3.5 Theorem 1: Itô-Isometrie

Sei $g \in L^2\ (0,T)$, Dann gilt:

$$E\left[\left(\int_0^T g(t,\omega)\,dW(t,\omega)\right)^2\right] = E\left[\int_0^T g(t,\omega)^2\,dt\right]$$

Insbesondere gilt, falls $g(t,\omega)=g(t)$ deterministisch ist:

$$E\left[\left(\int_0^T g(t)\,dW(t,\omega)\right)^2\right] = \int_0^t g(t)^2\,dt$$

4 Eindimensionale Itô- und Diffusionsprozesse

Mithilfe des Itô-Integrals ist es nun möglich Diffusionsprozesse zu betrachten, die als stochastische Differentialgleichungen (SDGL) gegeben sind. Dabei sind diese SDGLen durch die zugehörigen Integralgleichungen erklärt.

4.1 Definition 7: Itô-Prozesse

Ein stochastischer Prozess $\{X(t)|t\geq 0\}$ heißt Itô-Prozess, falls

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dW(s)$$

wobei $\{a(s)|t\geq s\geq 0\}$ und $\{b(s)|t\geq s\geq 0\}$ an $\mathcal{F}_t$ adaptierte Prozesse sind.
Man kann den Itô-Prozess auch durch eine SDGL beschreiben:

$$dX(t) = a(t)\,dt + b(t)\,dW(t)$$

Ein besonderer Itô-Prozess ist der Diffusionsprozess.

4.2 Definition 8: Diffusionsprozesse

Sei $\{X(t)|t\geq 0\}$ ein stetiger Itô- und Markov-Prozess mit

$$a(t) \equiv a(t, X(t)) \quad und \quad b \equiv b(t, X(t))$$

Dann nennt man $\{X(t)|t\geq 0\}$ einen Diffusionsprozess.

4.3 Definition 9: Quadratische Variation

Sei $\{X(t)|t\geq 0\}$ ein Diffusionsprozess. Die quadratische Variation von $\{X(t)|t\geq 0\}$ ist definiert durch:

$$\langle X\rangle(t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^t b(s)^2\,ds$$

diesen Ausdruck kann man auch wieder als SDGL schreiben:

$$d\langle X\rangle(t) = b(t)^2\,dt$$

4.4 Theorem 2: Itô-Formel für eindimensionale Diffusionsprozesse

Sei $\{X(t)|t\geq 0\}$ ein Diffusionsprozess mit SDGL

$$dX(t)=a(t)\,dt+b(t)\,dW(t)$$

Sei $f\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar in t und zweimal stetig differenzierbar in x. Sei $\{Y(t)|t\geq 0\} = \{f(t,X(t))|t\geq 0\}$. Dann ist $\{Y(t)|t\geq 0\}$ ein Diffusionsprozess mit:

$$dY(t)=\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))\,dt+\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))\,dX(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))\,d\langle X\rangle(t)$$

$$=\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))+\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))a(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X(t))b(t)^2\right]dt+\frac{\partial f}{\partial x}(t,X(t))b(t)\,dW(t)$$

5 n-dimensionale Diffusionsprozesse

5.1 Definition 10: n-dimensionaler Diffusionsprozess

Ein n-dimensionaler Diffusionsprozess $\{X(t)|t\geq 0\}$ ist ein Vektor $(X_1(t),\dots,X_n(t))$ aus Diffusionsprozessen$\{X_i(t)|t\geq 0\}$ mit:

$$dX_i(t)=a_i(t)\,dt+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\,dW_j(t)=a_i(t)\,dt+b_i(t)^T\,dW(t)$$

oder

$$dX(t)=a(t)\,dt+B(t)\,dW(t)$$

wobei

$$a(t)=(a_1(t),\dots,a_n(t))$$
$$b_i(t)=(b_{i1}(t),\dots,b_{in}(t))$$
$$B(t)=(b_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$$

und $\{W(t)|t\geq 0\}$ eine n-dimensionale Standard Brownsche Bewegung ist.

5.2 Definition 11: Quadratische Kovarianz

Die Quadratische Kovarianz von $\{X_i(t)|t\geq 0\}$ und $\{X_j(t)|t\geq 0\}$ ist definiert durch

$$\langle X_i,X_j\rangle(t)=\int_0^t b_i(s)^T b_j(s)\,ds$$

oder alternativ als SDGL

$$d\langle X_i,X_j\rangle(t)=b_i(t)^T b_j(t)\,dt$$

5.3 Theorem 3: Itô-Formel für n-dimensionale Diffusionsprozesse

$\{X(t)|t\geq 0\}$ ein n-dimensionaler Diffusionsprozess mit SDGL

$$dX(t)=a(t)\,dt+b(t)\,dW(t)$$

Sei f: $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar in t und zweimal stetig differenzierbar in x. Sei $\{Y(t)|t\geq 0\}=\{f(t,X(t))|t\geq 0\}$. Dann ist $\{Y(t)|t\geq 0\}$ ein Diffusionsprozess mit:

$$\begin{aligned}dY(t)&=\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))\,dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X(t))\,dX_i(t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t,X(t))\,d\langle X_i,X_j\rangle(t)\\&=\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,X(t))+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X(t))\,a_i(t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=i}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t,X(t))\,b_i(t)^T b_j(t)\right]dt\\&\quad+\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X(t))\,b_{ij}(t)\right)dW_j(t)\end{aligned}$$

5.4 Korollar 1: Produktregel

Seien $\{X(t)|t\geq 0\}$ und $\{Y(t)|t\geq 0\}$ eindimensionale Diffusionsprozesse. Sei $\{R(t)t\geq 0\}:=\{X(t)Y(t)|t\geq 0\}$. Dann gilt:

$$dR(t)=X(t)\,dY(t)+Y(t)\,dX(t)+d\langle X,Y\rangle(t)$$

Falls

$$\begin{aligned}dX(t)&=a_X(t)\,dt+b_X(t)'\,dW(t)\\dY(t)&=a_Y(t)\,dt+b_Y(t)'\,dW(t)\end{aligned}$$

dann ist

$$d\langle X,Y\rangle(t)=b_X(t)'\,b_Y(t)\,dt$$

6 Die Feynman – Kac Formel

Bestimmte SDGLs lassen sich mit Hilfsmitteln aus der Stochastik lösen.

6.1 Theorem 4: Die Feynman - Kac Formel

Angenommen, die Funktion $P(t,x)$ erfüllt die PDGL mit Randbedingung

$$\begin{gathered}\frac{\partial P}{\partial t}+f(t,x)\frac{\partial P}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\rho^2(t,x)\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-R(x)P+h(t,x)=0\\P(T,x)=\psi(x)\end{gathered}$$

wobei

$$f,h: [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\ ,\ R,\psi: [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

gegebene Funktionen sind. Dann gibt es einen Prozess $\{\hat{W}(t)|t\geq 0\}$ und Maß Q, so dass $\{\hat{W}(t)|t\geq 0\}$ eine Standard Brownsche Bewegung ist und $P(t,x)$ die Lösung

$$P(t,x)=E_Q\left[\int_t^T V(t,s)h(s,X(s))ds+V(t,T)\Psi(X(T))\middle|\mathcal{F}_t\right]\ ,\quad für\, t<T$$

wobei

$$dX(t)=f(t,X(t))dt+\rho(t,X(t))d\hat{W}(t)$$

$$V(t,s)=\exp\left[-\int_t^s R(X(s))ds\right]$$

$$\int_t^T E_Q\left[\left(\rho(s,X(s))\frac{\partial P}{\partial x}(s,X(s))\right)^2\middle|\mathcal{F}_t\right]ds<\infty$$

7 Der Martingaldarstellungssatz

Sei $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum $\{W(t)|t\geq 0\}$ eine n-dimensionale Brownsche Bewegung und $\mathcal{F}_t=\sigma(\{W(s)|0\leq s\leq t\})$ die von $\{W(s)|s\geq 0\}$ bis t erzeugte σ-Algebra.
Eine Aussage über die Existenz einer Lösung einiger Differentialgleichungen liefert der Martingaldartstellungssatz.

7.1 Theorem 5: Martingaldarstellungssatz

a) Sei $\{M(t)|t\geq 0\}$ ein Martingal mit

$$E_P\left[\int_o^T M(t)^2dt\right]<\infty$$

Dann existiert ein eindeutiger n-dimensionaler vorhersehbarer Prozess $\{m(t)|t\geq 0\}$, so dass:

$$M(t)=M(0)+\int_0^t m(s)'dW(t)\qquad oder\, als\, SDGL:\ \ dM(t)=m(t)^T dW(t)$$

b) Seien die n-dimensionalen Diffusionsprozesse $\{M^{(1)}(t)|t\geq 0\}$ und $\{M^{(2)}(t)|t\geq 0\}$ Martingale mit der Stochastischen Differentialgleichung

$$dM^{(i)}(t)=S_i(t)dW(t)$$

wobei $\{S_1(t)|t\geq 0\}$, $\{S_2(t)|t\geq 0\}\in M(n\times n)$ fast überall invertierbar sind für $0\leq t\leq T$.
Dann gibt es einen eindeutigen n×n-Prozess $\{\varphi(t)=(\varphi_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}|0\leq t\leq T\}$ so dass

$$dM^{(2)}(t)=\varphi(t)dM^{(1)}(t)\ \ oder\ \ dM_i^{(2)}(t)=\sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(t)dM_j^{(1)}(t)$$

8 Änderung des Wahrscheinlichkeitsmaßes

8.1 Definition 12: Äquivalente Maße

Zwei Maße P und Q auf $(\Omega,\mathcal{F})$ heißen äquivalent, falls gilt:

$$P(A)=0 \Leftrightarrow Q(A)=0 \textit{ für alle } A\in\mathcal{F}$$

Sei $(\Omega,\mathcal{F},P)$ein Wahrscheinlichkeitsraum $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W(s)|s\leq t) \otimes \mathcal{B}([o,t])$ die von den Pfaden $\{W(s,\omega)|s\geq 0\}$ der n-dimensionalen Brownschen Bewegung $\{W(t)|t\geq 0\}$ bis t erzeugte σ-Algebra.

8.2 Definition 13: Novikov Bedingung:

Sei 0<T<∞, $\{\gamma(t)=(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t))|T\geq t\geq 0\}$ ein bezüglich$\mathcal{F}_t$ vorhersehbarer Diffusionsprozess. $\{\gamma(t)|T\geq t\geq 0\}$ genügt der Novikov Bedingung, falls gilt:

$$E_P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |\gamma(t)|^2 dt\right)\right]<\infty$$

8.3 Theorem 6: Girsanov Theorem

a) Sei $\{W(t)|t\geq 0\}$ eine n-dimensionale Standard Brownsche Bewegung unter P, $\{\gamma(t)|T\geq t\geq 0\}$ ein n-dimensionaler Diffusionsprozess, der die Novikov–Bedingung erfüllt. Dann gibt es ein zu P äquivalentes Maß Q so dass gilt:

(1) P und Q sind äquivalent.
(2)

$$\left\{ W'(t)=W(t)+\int_0^t \gamma(s)\,ds \,\middle|\, t\geq 0 \right\}$$

eine n-dimensionale Standard Brownsche Bewegung unter Q *ist.*

b) Wenn Q äquivalent zu P auf $[0,T]\times\Omega$ ist, dann existiert ein n-dimensionaler vorhersehbarer Diffusionsprozess $\{\gamma(t)|T\geq t\geq 0\}$, so dass

$$\left\{ W'(t)=W(t)+\int_0^t \gamma(s)\,ds \,\middle|\, t\geq 0 \right\}$$

eine n-dimensionale Standard Brownsche Bewegung unter Q ist.

8.4 Bemerkung 3: Martingal

Sei

$$Z(t)=\exp\left[-\int_0^t \gamma(s)^T dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^t |\gamma(s)|^2 ds\right]$$

Wenn $\{\gamma(t)|T\geq t\geq 0\}$ der Novikov-Bedingung genügt, dann ist $\{Z(t)|T\geq t\geq 0\}$ ein Martingal unter P.

8.5 Definition 14: Radon - Nikodym Ableitung

Seien P und Q zwei äquivalente Maße auf $(\Omega,\mathcal{F})$, so definiert man die Radon-Nikodym Ableitung durch

$$\frac{dQ}{dP}(s,t)=\frac{Z(s)}{Z(t)}$$

Die Radon-Nikodym Ableitung gibt also die relative Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ω unter den beiden Maßen P und Q auf dem Intervall $[s,t]$ an.

8.6 Bemerkung 4:Anwendung der Radon - Nikodym Ableitung

a) Ist X $\mathcal{F}_T$ messbar, so gilt:

$$E_Q[X]=E_P[Z(T)X]$$

b) Ist X $\mathcal{F}_t$ messbar für $T\geq t>s\geq 0$ so gilt:

$$E_Q[X]=E_P[Z(t)X] \quad und$$
$$E_Q[X|\mathcal{F}_s]=Z(t)^{-1}E_P[Z(s)X|\mathcal{F}_s]$$