Seminar Versicherungsrisiko und Ruin
Eva Lang
30.06.2009

Fortgeschrittene Ruintheorie I

1 Einleitung

In diesem Kapitel wird das klassische Risikomodell weiterführend untersucht. Zunächst wird die Wahrscheinlichkeit betrachtet, dass Ruin eintritt ohne dass der Überschuss Prozess zuvor ein bestimmtes Level erreicht hat. Anschließend wird der Verlust des Versicherers bei Eintritt des Ruins betrachtet und die diesem Verlust zu Grunde liegende Verteilung ermittelt. Dann wird der größte Verlust des Versicherers betrachtet, bevor der Überschuss Prozess wieder das Level 0 erreicht und schließlich wird die Verteilung des Überschusses vom Versicherer kurz vor Eintritt des Ruins untersucht.
Notationen und Annahmen sind mit denen der klassischen Ruintheorie identisch.

2 Ein Barrieren-Problem

Notationen:

$\xi(u,b)$: Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von Ruin vom anfänglichen Überschuss u, ohne dass der Überschuss Prozess kurz vor Eintritt des Ruins ein Level $b > u$ erreicht
Alternative Formulierung: Wahrscheinlichkeit, dass Ruin bei Anwesenheit einer absorbierenden Barriere bei b eintritt.

$\chi(u,b)$: Wahrscheinlichkeit, dass der Überschuss Prozess vom anfänglichen Überschuss u das Level b erreicht, ohne zuvor unter 0 gefallen zu sein

Um Ausdrücke für $\xi(u,b)$ und $\chi(u,b)$ zu finden, werden die Wahrscheinlichkeiten vom Ruin und Überleben in einem unbeschränkten Überschuss Prozess betrachtet.
Tritt von einem anfänglichen Überschuss u kein Ruin ein, sondern Überleben des Versicherers, dann muss der Überschuss Prozess an einem Zeitpunkt das Level $b > u$ durchlaufen haben, da die Bedingung $c>\lambda m_1$ garantiert, dass $U(t) \to \infty, t \to \infty$
Das Verhalten vom Überschuss Prozess, einmal Level b zu erreichen, ist unabhängig von seinem Verhalten vor dem Erreichen von b. Daher gilt:

$$\phi(u) = \chi(u,b)\phi(b) \qquad \Leftrightarrow \qquad \chi(u,b) = \frac{\phi(u)}{\phi(b)} = \frac{1-\psi(u)}{1-\psi(b)}.$$

Tritt vom anfänglichen Überschuss u Ruin ein, so erreicht der Überschuss Prozess entweder Level b vor dem Ruin oder aber nicht. Daher gilt: $\psi(u) = \xi(u,b) + \chi(u,b)\psi(b)$.

Also folgt: $\xi(u,b) = \psi(u) - \frac{1-\psi(u)}{1-\psi(b)}\psi(b) = \frac{\psi(u)-\psi(u)\psi(b)-\psi(b)-\psi(u)\psi(b)}{1-\psi(b)} = \frac{\psi(u)-\psi(b)}{1-\psi(b)}$.

Es gilt: $\xi(u,b) + \chi(u,b) = 1$. Es tritt also entweder Ruin ein, ohne dass der Überschuss Prozess b erreicht oder der Überschuss Prozess erreicht das Level b.

3 Die Stärke vom Ruin

In diesem Kapitel ist neben der Wahrscheinlichkeit vom Ruin auch der Betrag des Verlustes vom Versicherer zum Zeitpunkt des Ruins, sollte dieser eintreten, von Interesse.
Sei u der anfängliche Überschuss, T_u der Zeitpunkt vom Eintreten des Ruins, wobei $T_u := \inf\{t: U(t) < 0\}$ und $T_u = \infty$, wenn $U(t) \geq 0 \ \forall\, t > 0$.

Somit gilt: $\psi(u) = P(T_u < \infty)$

Definition: $G(u,y) \coloneqq P(T_u < \infty \ und \ U(T_u) \geq -y)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ruin eintritt und dass der Verlust des Versicherers beim Ruin -oder die Stärke vom Ruin- höchstens y ist.

Es gilt: $\lim_{y\to\infty} G(u,y) = \psi(u)$ und

$\frac{G(u,y)}{\psi(u)} = P(|U(T_u)| \leq y : T_u < \infty)$ ist eine nicht-entartete Verteilungsfunktion.

Daher ist für einen gegebenen anfänglichen Überschuss u, $G(u,\cdot)$ eine entartete Verteilung mit entarteter Dichte

$$g(u,y) = \frac{\partial}{\partial y} G(u,y).$$

Um dies für G mittels Laplace Transformationen zu lösen, benötigen wir einen Ausdruck für $g(0,y)$.
Von der klassischen Ruintheorie wissen wir, dass die Dichte-Funktion des Betrags des ersten Rekord-Maximums des Gesamtverlust Prozesses (falls dieses eintritt) wie folgt aussieht: $k(x) = \frac{1}{m_1}(1 - F(x))$ (1)
und die Wahrscheinlichkeit für solch ein Maximum gegeben ist durch $\psi(0)$.

Daraus folgt: $k(y) = \frac{1}{m_1}\big(1 - F(y)\big) = \frac{g(0,y)}{\psi(0)}$ und damit $g(0,y) = \psi(0)k(y) = \frac{\psi(0)}{m_1}\big(1 - F(y)\big) = \frac{\lambda}{c}\big(1 - F(y)\big)$

Wenn Ruin eintritt und für den Versicherer einen Verlust von höchstens y mitbringt, so gibt es zwei Möglichkeiten, die bei der ersten Gelegenheit, wenn der Überschuss unter sein anfängliches Level fällt, eintreten können:

(i) Der Überschuss fällt auf $u - x\ (> 0)$, so dass der Ruin später von diesem neuen Überschusslevel mit einem maximalen Verlust von y eintritt.

(ii) Ruin tritt bereits bei diesem Fall des Überschusses mit einem maximalen Verlust von y ein.

Daraus folgt:

$$G(u,y) = \int_0^u g(0,x)G(u-x,y)dx + \int_u^{u+y} g(0,x)dx \qquad (2)$$
$$= \psi(0)\int_0^u k(x)G(u-x,y)dx + \psi(0)\eta(u,y), \qquad (3)$$

wobei $\eta(u,y) = \int_u^{u+y} k(x)dx = K(u+y) - K(u)$

Seien nun

$G^*(s,y) = \int_0^\infty e^{-su}G(u,y)du$,

$\eta^*(s,y) = \int_0^\infty e^{-su}\eta(u,y)du$ und

$k^*(s) = \int_0^\infty e^{-su}k(u)du$

Dann folgt durch Laplace-Transformation von (3): $G^*(s,y) = \psi(0)k^*(s)G^*(s,y) + \psi(0)\eta^*(s,y)$

$$\Leftrightarrow\ G^*(s,y) = \frac{\psi(0)\eta^*(s,y)}{1-\psi(0)k^*(s)}$$

Beispiel 1 Sei $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, x > 0$. Beh.: $G(u,y) = \psi(u)(1 - e^{-\alpha y})$

Beweis: Es gilt $m_1 = \frac{1}{\alpha}$, $k(x) = f(x)$, daher:

$$\eta(u,y) = \int_u^{u+y} \alpha e^{-\alpha x}dx = [-e^{-\alpha x}]_u^{u+y} = e^{-\alpha u}e^{-\alpha y} + e^{-\alpha u} = e^{-\alpha u}(1 - e^{-\alpha y})$$

und
$$\eta^*(s,y) = \int_0^\infty e^{-su}\eta(u,y)du = \int_0^\infty e^{-su}e^{-\alpha u}(1 - e^{-\alpha y})du$$
$$= (1 - e^{-\alpha y})\int_0^\infty e^{-u(s+\alpha)}du = (1 - e^{-\alpha y})\left[\frac{-1}{s+\alpha}e^{-u(s+\alpha)}\right]_0^\infty$$
$$= (1 - e^{-\alpha y})\left(\frac{-1}{s+\alpha}\right)(-1) = \frac{1-e^{-\alpha y}}{s+\alpha}$$

Außerdem $k^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\alpha e^{-\alpha x}dx = \alpha\left[\frac{-1}{s+\alpha}e^{-x(s+\alpha)}\right]_0^\infty = \frac{\alpha}{s+\alpha}$

Daher gilt: $G^*(s,y) = \frac{\psi(0)(1-e^{-\alpha y})}{\left(1-\psi(0)\frac{\alpha}{s+\alpha}\right)(s+\alpha)} = \frac{\psi(0)(1-e^{-\alpha y})}{s+\alpha-\psi(0)\frac{\alpha}{s+\alpha}s-\psi(0)\frac{\alpha}{s+\alpha}\alpha} = \frac{\psi(0)(1-e^{-\alpha y})}{s+\alpha-\psi(0)\alpha}$

Und mit $\psi(0) = \frac{\lambda m_1}{c} = \frac{\lambda}{\alpha c}$ gilt:

$G^*(s,y) = \frac{\lambda}{\alpha c}\frac{1-e^{-\alpha y}}{s+\alpha-\lambda/c}$

Somit: $G(u,y) = \frac{\lambda}{\alpha c}e^{-\left(\alpha-\frac{\lambda}{c}\right)u}(1 - e^{-\alpha y}) = \psi(u)(1 - e^{-\alpha y})$ ⇒Beh.

Dieses Ergebnis ist interessant, da es aussagt, dass die Verteilung vom Verlust beim Ruin, falls Ruin eintritt, die gleiche ist, wie die individuelle Schadenhöhenverteilung. Im klassischen Risikomodell tritt dies nur im Fall von einer exponentiellen Verteilung der individuellen Ansprüche auf. Grund hierfür ist die Gedächtnislosigkeit der exponentiellen Verteilung.

Angenommen, unmittelbar vor Eintritt des Ruins, zur Zeit T_u^- ist der Überschuss x, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Forderung, die zur Zeit T_u auftritt, $x + y$ überschreitet, wobei vorausgesetzt ist, dass sie x überschreitet, gegeben durch

$$\mathrm{P}(|U(T_u)| > y{:}\ U(T_u^-) = x) = \frac{e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha y}$$

und damit: $\mathrm{P}(|U(T_u)| \le y{:}\ U(T_u^-) = x) = 1 - e^{-\alpha y}$. Dies ist unabhängig von x.

Aus dem letzten Vortrag wissen wir, dass für die Laplace-Transformierte der Zufallsvariable L, dem Maximum des Gesamtschaden Prozesses gilt: $L^*(s) = E[e^{-sL}] = \frac{\phi(0)}{1-\psi(0)k^*(s)}$, damit folgt also

$$G^*(s,y) = \frac{\psi(0)}{\phi(0)}\eta^*(s,y)L^*(s) \qquad (4)$$

Hierbei ist die rechte Seite von (4) das Produkt von zwei Laplace-Transformationen und somit eine Transformation einer Faltung. Daher kann $G^*(s,y)$ invertiert werden mit dem Ergebnis

$$G(u,y) = \frac{\psi(0)}{\phi(0)}\int_0^u \eta(u-x,y)d\phi(x) = \frac{\psi(0)}{\phi(0)}\int_0^u (K(u-x+y) - K(u-x))d\phi(x)$$

Da die Verteilungsfunktion ϕ eine Wahrscheinlichkeit vom Betrag $\phi(0)$ bei 0 hat (also nicht unbedingt null ist), folgt

$$G(u,y) = \psi(0)\big(K(u+y) - K(u)\big) + \frac{\psi(0)}{\phi(0)} \int_0^u \big(K(u-x+y) - K(u-x)\big)\phi'(x)dx \qquad (5)$$

Mit diesem Ergebnis kann ein alternativer Weg, $G(u.y)$ auszudrücken, gefunden werden, der zwar unpraktisch zur Berechnung expliziter Ergebnisse ist, jedoch im Abschnitt 5 sinnvoll sein wird.

Aus der klassischen Ruintheorie wissen wir

$$\phi(u) = \phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n \, \phi(0) K^{n*}(u)$$

Sodass für $u > 0$ gilt $\qquad \frac{d}{du}\, \phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n \, \phi(0) k^{n*}(u)$

Zusätzlich mit $K(u-x+y) - K(u-x) = \int_{u-x}^{u-x+y} k(z)dz$ folgt für (5):

$$\begin{aligned} G(u,y) &= \psi(0)\big(K(u+y) - K(u)\big) + \frac{\psi(0)}{\phi(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n \, \phi(0) \int_0^u k^{n*}(x) \int_{u-x}^{u-x+y} k(z)dzdx \\ &= \psi(0)\big(K(u+y) - K(u)\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} \int_0^u k^{n*}(x) \int_{u-x}^{u-x+y} k(z)dzdx \qquad (6) \end{aligned}$$

Im Ausdruck $\psi(0)^{n+1} k^{n*}(x) \int_{u-x}^{u-x+y} k(z)dzdx$ gibt hierbei $\psi(0)^n k^{n*}(x)dx$ dieWahrscheinlichkeit an, dass das n-te Rekordtief vom Überschuss Prozess in einem Überschuss zwischen $u-x$ und $u-x+dx$ resultiert. $\psi(0) \int_{u-x}^{u-x+y} k(z)dz$ repräsentiert die Wahrscheinlichkeit, dass das nächste Rekordtief zum Ruin führt mit einem maximalen Verlust von y.

4 Die maximale Stärke vom Ruin

In diesem Abschnitt dauert der Überschuss Prozess an, auch wenn Ruin eingetreten ist. Der maximale Ruin des Versicherers wird von dem Zeitpunkt des Eintritts des Ruins bis zum Zeitpunkt, an dem der Überschuss Prozess als nächstes das Level 0 erreicht, betrachtet.

Def: T_u' ist die Zeit, zu der der Überschuss Prozess das erste Mal Level 0 durchquert, nachdem Ruin eingetreten ist.

$M_u = sup\{|U(t)|, T_u \le t \le T_u'\}$ ist eine Zufallsvariable, die die maximale Stärke des Ruins angibt.

$J_u(z) = P(M_u \le z;\, T_u < \infty)$ ist die Verteilungsfunktion von M_u, vorausgesetzt, dass Ruin eintritt.

Wenn Ruin mit einem Verlust $y \le z$ eintritt und wenn der Überschuss nicht unter $-z$ vom Level $-y$ fällt, wird die maximale Stärke des Ruins z sein. Nach Abschnitt 2 ist die Wahrscheinlichkeit für die zweite Bedingung $\chi(z-y, z)$, weil das Erreichen von Level 0 von Level $-y$ ohne unter $-z$ zu fallen äquivalent dazu ist, das Level z von Level $z-y$ zu erreichen, ohne unter 0 zu fallen.

Daher gilt: $\qquad J_u(z) = \int_0^z \frac{g(u,y)}{\psi(u)} \chi(z-y,z)\, dy = \frac{1}{\psi(u)\phi(z)} \int_0^z g(u,y)\phi(z-y)\, dy$

Wenn Ruin von einem anfänglichen Überschuss $u+z$ eintritt, dann muss der Überschuss Prozess zu einem Zeitpunkt in der Zukunft unter z fallen. Teilt man dieses Ereignis derart auf, dass entweder Ruin zu diesem Zeitpunkt des Falls eintritt, wofür die Wahrscheinlichkeit gegeben ist durch $\int_z^{\infty} g(u,y)dy$ oder erst zu einem späteren Zeitpunkt eintritt, wofür die Wahrscheinlichkeit gegeben ist durch $\int_0^z g(u,y)\psi(z-y)dy$, so erhält man

$$\psi(u+z) = \int_z^{\infty} g(u,y)dy + \int_0^z g(u,y)\psi(z-y)dy \qquad (7)$$

Da $\psi = 1 - \phi$ folgt für Gleichung (7) $\qquad \psi(u+z) = \int_z^{\infty} g(u,y)dy + \int_0^z g(u,y)dy - \int_0^z g(u,y)\phi(z-y)dy$

$$\Leftrightarrow \int_0^z g(u,y)\phi(z-y)dy = \int_z^{\infty} g(u,y)dy + \int_0^z g(u,y)dy - \psi(u+z) = \psi(u) - \psi(u+z)$$

Daher gilt

$$J_u(z) = \frac{\psi(u) - \psi(u+z)}{\psi(u)(1-\psi(z))}$$

Beispiel 2: Sei $f(x) = e^{-x}, x > 0$ und sei $c = (1+\theta)\lambda$.

Beh.: J_u kann als eine unendliche Summe von Exponentialfunktionen dargestellt werden

Beweis: Aus der klass. Ruintheorie ist bekannt, dass $\psi(u) = (1-R)e^{-Ru}$ mit $R = \frac{\theta}{1+\theta}$., R: Anpassungskoeffizient

$$\begin{aligned} \text{Daher gilt } J_u(z) &= \frac{\psi(u) - \psi(u+z)}{\psi(u)(1-\psi(z))} = \frac{1-e^{-Rz}}{1-(1-R)e^{-Rz}} = (1 - e^{-Rz}) \sum_{j=0}^{\infty} (1-R)^j e^{-Rjz} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (1-R)^j e^{-Rjz} - \sum_{j=0}^{\infty} (1-R)^j e^{-R(j+1)z} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (1-R)^j e^{-Rjz} - \sum_{j=1}^{\infty} (1-R)^{j-1} e^{-Rjz} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (1-R)^{j-1} e^{-Rjz} ((1-R) - 1) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} R(1-R)^{j-1} e^{-Rjz} \end{aligned}$$

Da $\sum_{j=1}^{\infty} R(1-R)^{j-1} = 1$, folgt

$$J_u(z) = \sum_{j=1}^{\infty} v_j (1 - e^{-Rjz}),$$

wobei $v_j = R(1-R)^{j-1}$ $\qquad \Rightarrow$Beh.

5 Der Überschuss vor dem Ruin

In diesem Teil wird die Verteilung des Überschusses unmittelbar vor dem Ruin betrachtet.

Notation: T_u^-: Zeitpunkt unmittelbar vor dem Ruin

$U(T_u^-)$: Level des Überschuss Prozesses unmittelbar vor der Auszahlung der Forderung, die den Ruin des Versicherers verursacht.

Die Wahrscheinlichkeit, dass von einem anfänglichen Überschuss u Ruin eintritt und der Überschuss unmittelbar vor dem Ruin weniger als x ist, wird bezeichnet mit

$$W(u,x) = \mathrm{P}(T_u < \infty \; und \; U(T_u^-) < x).$$

Um einen Ausdruck für W zu finden, müssen zwei Fälle betrachtet werden:

(i) $0 \leq u < x$: Ruin kann bei der ersten Gelegenheit, wenn der Überschuss unter das anfängliche Level fällt, mit einem Überschuss vor dem Ruin von weniger als x eintreten oder aber nicht.

(ii) $u \geq x$: es kann nicht unmittelbar Ruin eintreten.

Betrachte zunächst $0 \leq u < x$: Wenn der Überschuss Prozess x niemals erreicht, so muss Ruin mit einem Überschuss kleiner als x eintreten. Daher gilt unter Berücksichtigung, ob der Überschuss Prozess vor dem Ruin das Level x erreicht oder nicht:

$$W(u,x) = \xi(u,x) + \chi(u,x)W(x,x) \qquad (8) \qquad \text{mit } \xi(u,x) \text{ und } \chi(u,x) \text{ wie im 2. Abschnitt}$$

Betrachte nun den Fall $u = x$: Wenn der Überschuss vor dem Ruin weniger als x sein soll, so muss der Überschuss beim ersten Abfall unter sein anfängliches Level zwischen 0 und x gefallen sein. Es gilt:

$$W(x,x) = \int_0^x g(0,y)W(x-y,x)dy \qquad (9)$$

(8) einsetzen (da $x - y < x$) liefert:

$$\begin{aligned} W(x,x) &= \int_0^x g(0,y)(\xi(x-y,x) + \chi(x-y,x)W(x,x))dy \\ &= \int_0^x g(0,y)\xi(x-y,x)dy + \int_0^x g(0,y)\chi(x-y,x)dy\, W(x,x) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow W(x,x) = \frac{\int_0^x g(0,y)\xi(x-y,x)dy}{1-\int_0^x g(0,y)\chi(x-y,x)dy}. \qquad (10)$$

Für $y \longrightarrow \infty$ gilt für (2):

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \int_0^u g(0,y)\,\psi(u-y)dy + \int_u^\infty g(0,y)dy \qquad (11) \\ &= \int_0^u g(0,y)\,\psi(u-y)dy + \psi(0) - G(0,u) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^u g(0,y)\,\psi(u-y)dy = \psi(u) - \psi(0) + G(0,u)$$

Damit lässt sich der Zähler in (10) wie folgt schreiben:

$$\int_0^x g(0,y)\xi(x-y,x)dy = \int_0^x g(0,y)\frac{\psi(x-y)-\psi(x)}{1-\psi(x)}dy = \frac{\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\int_0^x \psi(x)g(0,y)dy}{1-\psi(x)} = \frac{\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\psi(x)G(0,x)}{1-\psi(x)}$$

Und das Integral im Nenner wird zu

$$\int_0^x g(0,y)\chi(x-y,x)dy = \int_0^x g(0,y)\frac{1-\psi(x-y)}{1-\psi(x)}dy = \frac{\int_0^x g(0,y)dy-\psi(x)+\psi(0)-G(0,x)}{1-\psi(x)} = \frac{G(0,x)-\psi(x)+\psi(0)-G(0,x)}{1-\psi(x)}$$

Somit lässt sich $W(x,x)$ schreiben als

$$W(x,x) = \frac{\frac{\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\psi(x)G(0,x)}{1-\psi(x)}}{1-\frac{G(0,x)-\psi(x)+\psi(0)-G(0,x)}{1-\psi(x)}} = \frac{\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\psi(x)G(0,x)}{1-\psi(x)-(G(0,x)-\psi(x)+\psi(0)-G(0,x))} = \frac{\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\psi(x)G(0,x)}{1-\psi(0)} \qquad (12)$$

Mit Hilfe von (8) und (12) ergibt sich für $0 \leq u < x$:

$$\begin{aligned} W(u,x) &= \xi(u,x) + \chi(u,x)\frac{\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\psi(x)G(0,x)}{1-\psi(0)} = \frac{\psi(u)-\psi(x)}{1-\psi(x)} + \frac{1-\psi(u)}{1-\psi(x)}\frac{\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\psi(x)G(0,x)}{1-\psi(0)} \\ &= \frac{\psi(u)-\psi(x)-\psi(0)\psi(u)+\psi(0)\psi(x)+(1-\psi(u))(\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\psi(x)G(0,x))}{(1-\psi(x))(1-\psi(0))} \\ &= \frac{\psi(u)\big(1-\psi(x)-G(0,x)+\psi(x)G(0,x)\big)+\psi(0)\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\psi(x)G(0,x)}{(1-\psi(x))(1-\psi(0))} \\ &= \frac{\psi(u)\big((1-\psi(x))(1-G(0,x)\big)+\psi(0)(\psi(x)-1)+G(0,x)(1-\psi(x))}{(1-\psi(x))(1-\psi(0))} \\ &= \frac{1-G(0,x)}{1-\psi(0)}\psi(u) - \frac{\psi(0)-G(0,x)}{1-\psi(0)} \qquad (13) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $u = 0$: $W(0,x) = \frac{\psi(0)-\psi(0)G(0,x)-\psi(0)+G(0,x)}{1-\psi(0)} = \frac{G(0,x)(1-\psi(0))}{1-\psi(0)} = G(0,x)$.

Betrachte nun den Fall $u > x$. Falls der Überschuss vor dem Ruin weniger als x beträgt, so muss der Überschuss bei einer ersten Gelegenheit unter x gefallen sein, jedoch um nicht mehr als x. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Überschuss von u auf ein Level zwischen x und 0 fällt, ist identisch mit der Wahrscheinlichkeit, dass Ruin von einem anfänglichem Überschuss $u - x$ mit einem Verlust von maximal x eintritt. Also

$$W(u,x) = \int_0^x g(u-x,y)W(x-y,x)dy \qquad (14)$$

Einsetzen von (13) liefert:

$$\begin{aligned} W(u,x) &= \int_0^x g(u-x,y)\Big(\tfrac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}\psi(x-y) - \tfrac{\psi(0)-G(0.x)}{1-\psi(0)}\Big)dy \\ &= \int_0^x g(u-x,y)\,\tfrac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}\psi(x-y)dy - \int_0^x g(u-x,y)\,\tfrac{\psi(0)-G(0.x)}{1-\psi(0)}dy \\ &= \tfrac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}\int_0^x g(u-x,y)\psi(x-y)dy - \tfrac{\psi(0)-G(0.x)}{1-\psi(0)}G(u-x,x) \qquad (15) \end{aligned}$$

Um das Integral in (15) abzuschätzen, wird verwendet, dass Ruin auf zwei Wege eintreten kann:

(i) Der Überschuss fällt zunächst unter x (jedoch nicht um mehr als x) auf $x - y$ und Ruin tritt erst später von diesem Level ein

(ii) Der Überschuss fällt bereits beim ersten Abfall um mehr als x unter x, wodurch es zum Ruin kommt.

Daher kann für $x < u$ die Ruin-Wahrscheinlichkeit $\psi(u)$ geschrieben werden als

$$\psi(u) = \int_0^x g(u-x,y)\psi(x-y)dy + \int_x^\infty g(u-x,y)dy$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x g(u-x,y)\psi(x-y)dy = \psi(u) - \int_x^\infty g(u-x,y)dy = \psi(u) - \psi(u-x) + G(u-x,x)$$

Dieser Ausdruck in (15) eingesetzt ergibt für $u > x$

$$\begin{aligned} W(u,x) &= \tfrac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}(\psi(u) - \psi(u-x) + G(u-x,x)) - \tfrac{\psi(0)-G(0.x)}{1-\psi(0)}G(u-x,x) \\ &= \tfrac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}(\psi(u) - \psi(u-x)) + \tfrac{G(u-x,x)-G(0.x)G(u-x,x)-\psi(0)G(u-x,x)+G(0.x)G(u-x,x)}{1-\psi(0)} \\ &= \tfrac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}(\psi(u) - \psi(u-x)) + \tfrac{G(u-x,x)(1-\psi(0))}{1-\psi(0)} \\ &= G(u-x,x) - \tfrac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}(\psi(u-x) - \psi(u)) \qquad (16) \end{aligned}$$

Da (12) sowohl (13) und (16) erfüllt, kann als Ergebnis zusammengefasst werden:

$$W(u,x) = \tfrac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}\psi(u) - \tfrac{\psi(0)-G(0.x)}{1-\psi(0)} \qquad \text{für } 0 \le u \le x \qquad (17)$$

und

$$W(u,x) = G(u-x,x) - \tfrac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}(\psi(u-x) - \psi(u)) \qquad \text{für } u \ge x \qquad (18)$$

Folglich kann die Verteilungsfunktion vom Überschuss vor Eintritt des Ruins mit Termen von der Ruin-Wahrscheinlichkeit und der Verteilungsfunktion vom Verlust beim Ruin ausgedrückt werden.
Auch wenn bei bekannten ψ und G diese Ergebnisse relativ leicht zu erhalten sind, so ist es doch einfacher mit der Dichtefunktion w umzugehen.

Definition: $\quad w(u,x) := \frac{\partial}{\partial x} W(u,x)$

W ist bei $u = x$ kontinuierlich, aber nicht differenzierbar, wodurch bei der Betrachtung von w die folgenden zwei Fälle berücksichtigt werden:

(i) $u < x$: Ableiten von (17) liefert:

$$w(u,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}\psi(u) - \frac{\psi(0)-G(0.x)}{1-\psi(0)}\right) = \frac{-g(0,x)}{1-\psi(0)}\psi(u) + \frac{g(0,x)}{1-\psi(0)} = g(0,x)\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}$$

Weil $W(0,x) = G(0,x)$ und $w(0,x) = g(0,x) = \frac{\lambda}{c}\big(1 - F(x)\big)$ (nach 2. Abschnitt), folgt:

$$w(u,x) = \tfrac{\lambda}{c}\big(1 - F(x)\big)\tfrac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}.$$

(ii) $u > x$: Ableiten von (18) liefert:

$$\begin{aligned} w(u,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(G(u-x,x) - \frac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}(\psi(u-x) - \psi(u))\right) \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x}G(u-x,x) + g(0,x)\tfrac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)} - \tfrac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)}\tfrac{\partial}{\partial x}\psi(u-x) \qquad (19) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (6) kann $G(u-x,x)$ geschrieben werden als:

$$G(u-x,x) = \psi(0)\big(K(u)-K(u-x)\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} \int_0^{u-x} k^{n*}(s) \int_{u-x-s}^{u-s} k(z)dzds$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} G(u-x,x) &= \psi(0)k(u-x) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} k^{n*}(u-x) \int_0^x k(z)dz \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} \int_0^{u-x} k^{n*}(s)k(u-x-s)ds \\ &= \psi(0)k(u-x) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} k^{n*}(u-x)K(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} k^{(n+1)*}(u-x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n k^{n*}(u-x) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} k^{n*}(u-x)K(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n k^{n*}(u-x)[1-\psi(0)K(x)].\end{aligned}$$

Mit $y \to \infty$ in (6) lässt sich schreiben:

$$\psi(u-x) = \psi(0)\big(1-K(u-x)\big) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} \int_0^{u-x} k^{n*}(s) \int_{u-x-s}^{\infty} k(z)dzds$$

sodass

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\psi(u-x) &= \psi(0)k(u-x) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} k^{n*}(u-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} \int_0^{u-x} k^{n*}(s)k(u-x-s)ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n k^{n*}(u-x) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^{n+1} k^{n*}(u-x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n k^{n*}(u-x)[1-\psi(0)].\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(u-x,x) = \frac{1-\psi(0)K(x)}{1-\psi(0)} \frac{\partial}{\partial x} \psi(u-x)$$

und mit $G(0,x) = \int_0^x g(0,y)dy = \int_0^x k(y)\psi(0)dy = \psi(0)K(x)$ ergibt sich aus (19)

$$\begin{aligned}w(u,x) &= \frac{1-G(0,x)}{1-\psi(0)} \frac{\partial}{\partial x}\psi(u-x) + g(0,x)\frac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)} - \frac{1-G(0.x)}{1-\psi(0)} \frac{\partial}{\partial x}\psi(u-x) \\ &= g(0,x)\frac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)} = \frac{\lambda}{c}(1-F(x))\frac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)}.\end{aligned}$$

Sind F und ψ bekannt, so lässt sich also auch w leicht bestimmen. (Bemerkenswert ist, dass so wenige Informationen ausreichen.) Außerdem erkennt man für $u > 0$ eine Diskontinuität bei $x = u$ der Dichte $w(u,x)$.

Die oben erwähnte Identität $W(0,x) = G(0,x)$ lässt sich durch duale Ereignisse erklären. Betrachtet man eine Realisation eines Überschuss Prozesses, der bei $u = 0$ beginnt und für den Ruin mit einem Überschuss vor dem Ruin von weniger als x eintritt, so gibt es für diese Realisation eine einmalige Realisation eines dualen Prozesses $\{\widehat{U}(t)\}_{t\geq 0}$, derart, dass in diesem dualen Prozess Ruin mit einem Verlust von weniger als x eintritt.

Definition: $\widehat{U}(t) = -U(T_0' - t) \quad f\ddot{u}r\ 0 \leq t \leq T_0'$

$\widehat{U}(t) = U(t) \qquad f\ddot{u}r\ t \geq T_0',$

mit T_0': Zeit des ersten Übergangs des Überschuss Prozesses durch Level 0.

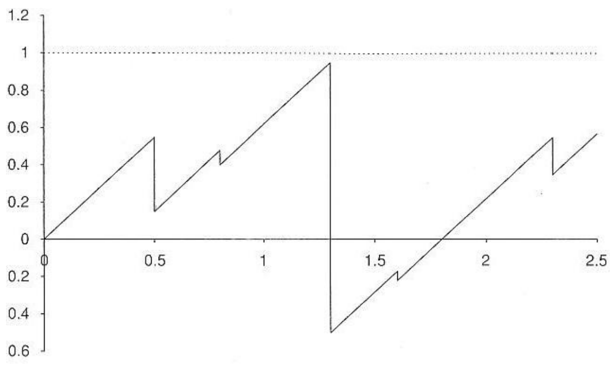

Figure 8.1 A realisation of a surplus process starting at $u = 0$ for which the surplus prior to ruin is less than 1.

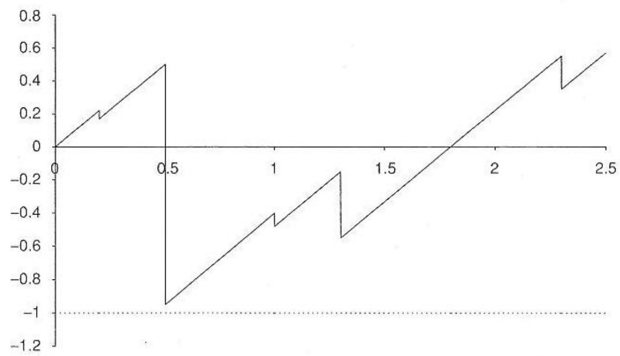

Figure 8.2 The dual of the realisation in Fig. 8.1.

Figur 8.1 zeigt einen Überschuss Prozess, für den Ruin von anfänglichen Überschuss 0 mit einem Überschuss vor dem Ruin von weniger als 1 eintritt. Figur 8.2 zeigt die duale Realisation, wobei der Verlust beim Ruin weniger als 1 beträgt.

In Figur 8.1 erkennt man, dass 4 Schäden von Beträgen $x_1, \dots, x_4$ zwischen Zeitpunkt 0 und T_0' zu den Zeiten $t_1, \dots, t_4$ eintreten.

In Figur 8.2 treten Schäden von Beträgen $x_4, \dots, x_1$ zu den Zeiten $T_0' - t_4, \dots, T_0' - t_1$ ein. Die Wahrscheinlichkeiten dieser Realisationen sind also identisch.