Seminar Versicherungsrisiko und Ruin
am 07.07.2009 von Hanna Klotz

Fortgeschrittene Ruintheorie II

1. Einleitung

In letzten Vortrag wurde die Zufallsvariable T_u eingeführt, die die Zeit des Ruins kennzeichnet. Die Verteilung von T_u ist wichtig da $\Pr(T_u \leq t)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass sich der Ruin vor oder zur Zeit t ereignet. Mit anderen Worten, wenn wir die Verteilung von T_u kennen, dann sind wir in der Lage die „Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit" zu berechnen bzw. abzuschätzen. In diesem Abschnitt betrachten wir die exakte und die approximierte Ermittlung der Dichten und der Momente von T_u.

2. Die Laplace Transformation von T_u

Definiere eine Funktion φ durch $\varphi(u,\delta) = E[e^{-\delta T_u} I(T_u < \infty)$ wobei δ ein nicht negativer Parameter ist, den wir in diesem Abschnitt als den Parameter einer Laplace Transformation betrachten, und I ist die Indikatorfunktion, d.h. $I(A) = 1$, wenn das Ereignis A eintritt und 0 sonst. (In Abschnitt 5 betrachten wir eine Funktion ähnlich zu φ und in dieser Funktion ist die Interpretation von δ, dass es der Zinssatz ist.)

Wir können die Integro-Differential-Gleichung für φ herleiten indem wir die Technik der Bedingung auf die Zeit und den Betrag der ersten Forderung verwenden. Es folgt:

$$\varphi(u,\delta) = E\left[e^{-\delta T_u} I(T_u < \infty)\right] = E\left[E[e^{-\delta T_u} I(T_u < \infty)|T_1]\right] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \cdot E[e^{-\delta T_u} I(T_u < \infty)|T_1 = t]dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \cdot E\left[E[e^{-\delta T_u} I(T_u < \infty)|T_1 = t|y_1]\right]dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_{u+ct}^\infty f(x)\,dx\right) e^{-\delta t}\,dt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_0^{u+ct} f(x)\varphi(u+ct-x,\delta)\,dx\right) e^{-\delta t}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda \underbrace{e^{-\lambda t} e^{-\delta t}}_{e^{-(\lambda+\delta)t}} \int_0^{u+ct} f(x)\varphi(u+ct-x,\delta)\,dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \int_{u+ct}^\infty f(x)\,dxdt \tag{1}$$

Substitution von $s = u + ct \Leftrightarrow t = \frac{s-u}{c}$ in Gleichung (1) ergibt

$$\varphi(u,\delta) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-(\lambda+\delta)(s-u)/c} \int_0^s f(x)\varphi(s-x,\delta)\,dxds + \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-(\lambda+\delta)(s-u)/c} \int_s^\infty f(x)\,dxds$$

und Differenzieren dieser Gleichung nach u ergibt

[da $\frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\frac{-s\lambda - s\delta + u\lambda + u\delta}{c}}\right) = \frac{\lambda+\delta}{c}\left(e^{\frac{-s\lambda - s\delta + u\lambda + u\delta}{c}}\right)$ und $e^{-(\lambda+\delta)(s-u)/c} = e^0 = 1$ für $s = u$ und es gilt $F(\infty) = 1$]

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) = \frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(u,\delta) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(u-x)\varphi(x,\delta)\,dx - \frac{\lambda}{c}(1-F(u)). \tag{2}$$

Gleichung (2) ist eine allgemeine Gleichung, die für verschiedene Formen von F gelöst werden kann.
Für den Rest des Abschnittes konzentrieren wir uns auf den speziellen Fall, dass $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$.
Dann, wenn wir für beide f und F einsetzen in Gleichung (2), erhalten wir

[da $F(u) = 1 - e^{-\alpha u} \implies 1 - F(u) = e^{-\alpha u}$ und $f(u-x) = \frac{\partial}{\partial u}F(u-x) = \frac{\partial}{\partial u}\left(1 - e^{-\alpha(u-x)}\right) = -\alpha e^{-\alpha(u-x)}$]

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) = \frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(u,\delta) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \alpha e^{-\alpha(u-x)}\,\varphi(x,\delta)dx - \frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u} \tag{3}$$

$$= \frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(u,\delta) - \frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u}\int_0^u \alpha e^{\alpha x}\,\varphi(x,\delta)dx - \frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u}$$

Differenation ergibt

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi(u,\delta) = \frac{\lambda+\delta}{c}\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) + \left[\alpha\frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u}\int_0^u \alpha e^{\alpha x}\varphi(u,\delta)\,dx - \frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u}\cdot\alpha e^{\alpha u}\varphi(u,\delta)\right] - (-\alpha)\frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u}$$

$$= \frac{\lambda+\delta}{c}\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) + \underbrace{\frac{\alpha\lambda}{c}e^{-\alpha u}\int_0^u \alpha e^{\alpha x}\varphi(u,\delta)\,dx - \frac{\alpha\lambda}{c}\varphi(u,\delta) + \frac{\alpha\lambda}{c}e^{-\alpha u}}_{-\alpha\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta)+\frac{\alpha\delta}{c}\varphi(u,\delta)}$$

so dass

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi(u,\delta) + \alpha\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) = \frac{\lambda+\delta}{c}\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) + \frac{\alpha\delta}{c}\varphi(u,\delta)$$

oder

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi(u,\delta) + \left(\alpha - \frac{\lambda+\delta}{c}\right)\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) - \frac{\alpha\delta}{c}\varphi(u,\delta) = 0. \qquad \textbf{(4)}$$

Die allgemeine Lösung von Gleichung (4) ist $\varphi(u,\delta) = \kappa_1 e^{\rho_\delta u} + \kappa_2 e^{-R_\delta u}$ wobei $\rho_\delta > 0, -R_\delta < 0$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (4) sind, welche ist $s^2 + \left(\alpha - \frac{\lambda+\delta}{c}\right)s - \frac{\alpha\delta}{c} = 0$ (5), und $\kappa_1 und\ \kappa_2$ hängen von δ ab.

Da $\varphi(u,\delta) \le \psi(u)\ gilt\ \lim_{u\to\infty}\varphi(u,\delta) = 0$ und es folgt, dass $\kappa_1 = 0$ und $\kappa_2 = \varphi(0,\delta)$ ist,
da $\lim\limits_{u\to\infty}(e^{\rho_\delta u}) = \infty\ \ und\ \ \lim\limits_{u\to\infty}(e^{-R_\delta u}) = 0.$ → Es gilt also: $\varphi(u,\delta) = \varphi(0,\delta)\mathrm{e}^{-R_\delta u}$

Um $\varphi(0,\delta)$ zu finden setzen wir $\varphi(0,\delta)\mathrm{e}^{-R_\delta u}$ für $\varphi(u,\delta)$ in Gleichung (3) ein und erhalten

$$-R_\delta\varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u} = \frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u} - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \alpha e^{-\alpha(u-x)}\varphi(0,\delta)e^{-R_\delta x}\,dx - \frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u}$$

$$= \frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u} - \frac{\alpha\lambda}{c}e^{-\alpha u}\varphi(0,\delta)\frac{1}{\alpha-R_\delta}\left(e^{(\alpha-R_\delta)u} - 1\right) - \frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u}$$

[da $\int\left(e^{-\alpha(u-x)}e^{-R_\delta x}\right)dx = \int(e^{-\alpha u+\alpha x-R_\delta x})\,dx = e^{-\alpha u}\int e^{(\alpha-R_\delta)x}\,dx = e^{-\alpha u}\frac{1}{\alpha-R_\delta}e^{(\alpha-R_\delta)x}$].

Wenn wir diese Identität umstellen erhalten wir

$$\frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u} - \frac{\alpha\lambda}{c}e^{-\alpha u}\varphi(0,\delta)\frac{1}{\alpha-R_\delta}e^{\alpha u}e^{-R_\delta u} + \frac{\alpha\lambda}{c}e^{-\alpha u}\varphi(0,\delta)\frac{1}{\alpha-R_\delta} - \frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u}$$

$$= \varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u}\left(\frac{\lambda+\delta}{c} - \frac{\alpha\lambda}{c}\cdot\frac{1}{\alpha-R_\delta}\right) + e^{-\alpha u}\left(\frac{\alpha\lambda}{c}\varphi(0,\delta)\frac{1}{\alpha-R_\delta} - \frac{\lambda}{c}\right)$$

$$= \varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u}\left(R_\delta + \frac{\lambda+\delta}{c} - \frac{\alpha\lambda}{c}\frac{1}{\alpha-R_\delta}\right) + e^{-\alpha u}\left(\frac{\alpha\lambda}{c}\frac{\varphi(0,\delta)}{\alpha-R_\delta} - \frac{\lambda}{c}\right) = 0$$

was uns $\varphi(0,\delta) = 1 - R_\delta/\alpha$ gibt, da $-R_\delta < 0$ die Wurzel der charakteristischen Gleichung ist und somit gilt, dass

$$R_\delta + \frac{\lambda+\delta}{c} - \frac{\alpha\lambda}{c}\frac{1}{\alpha-R_\delta} = \frac{-1}{\alpha-R_\delta}\left(\frac{(\alpha-R_\delta)R_\delta}{-1} + \frac{(\lambda+\delta)(\alpha-R_\delta)}{-c} + \frac{\alpha\lambda}{c}\right)$$

$$= \frac{-1}{\alpha-R_\delta}\left(-\alpha R_\delta + {R_\delta}^2 - \frac{\alpha\lambda}{c} + \frac{R_\delta\lambda}{c} - \frac{\alpha\delta}{c} + \frac{R_\delta\delta}{c} + \frac{\alpha\lambda}{c}\right)$$

$$= \frac{-1}{\alpha-R_\delta}\left({R_\delta}^2 - \left(\alpha - \frac{\lambda+\delta}{c}\right)R_\delta - \frac{\alpha\delta}{c}\right) = 0$$

also $\varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u}\left(R_\delta + \frac{\lambda+\delta}{c} - \frac{\alpha\lambda}{c}\frac{1}{\alpha-R_\delta}\right) = 0$ und somit $e^{-\alpha u}\left(\frac{\alpha\lambda}{c}\frac{\varphi(0,\delta)}{\alpha-R_\delta} - \frac{\lambda}{c}\right) = 0 \implies \frac{\alpha\lambda}{c}\frac{\varphi(0,\delta)}{\alpha-R_\delta} - \frac{\lambda}{c} = 0 \Leftrightarrow$
$\varphi(0,\delta) = \frac{\lambda}{c}(\alpha-R_\delta)\frac{c}{\alpha\lambda} = 1 - \frac{R_\delta}{\alpha}$

Unter Verwendung von Gleichung (5) folgt: $\varphi(u,\delta) = 0 \cdot e^{\rho_\delta u} + \varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u} = \left(1 - \frac{R_\delta}{\alpha}\right) e^{-R_\delta u}$ **(6)**

Beachte, dass wir mit $\delta = 0$ erhalten $\varphi(u,0) = E[e^{-0T_u} I(T_u < \infty)] = E[I(T_u < \infty)] = \psi(u)$ und R_0 ist der Anpassungskoeffizient, also gibt Gleichung (6) die endgültige Ruinwahrscheinlichkeit als einen speziellen Fall an.

Ausgegend von Gleichung (5) finden wir

$$R_\delta = \frac{-\lambda - \delta + c\alpha + \sqrt{(c\alpha - \delta - \lambda)^2 + 4c\delta\alpha}}{2c} \qquad \textbf{(7)}$$

und mit diesem Ausdruck können wir Gleichung (6) nutzen um sowohl die Momente als auch die Dichtefunktion von T_u zu finden. Um die Momente zu finden beachten wir, dass $(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial \delta^k} \varphi(u,\delta)\Big|_{\delta=0} = E[T_u^k I(T_u < \infty)]$. $\quad (*)$

So können wir durch wiederholte Differentation der Funktion φ die Momente von der Zeit des Ruins erhalten.

Zum Beispiel $\frac{\partial}{\partial\delta}\varphi(u,\delta) = -\frac{\grave{R_\delta}}{\alpha} e^{-R_\delta u} - (1 - \frac{R_\delta}{\alpha})\grave{R_\delta} u e^{-R_\delta u}$, und mit Gleichung (7)

$$\grave{R_\delta} = \frac{1}{2c}\left(-1 + \frac{2\overbrace{[(c\alpha - \delta - \lambda)\cdot(-1) + 2c]}^{-c\alpha + \delta + \lambda + 2c\alpha = \delta + \lambda + c\alpha}}{2\sqrt{(c\alpha - \delta - \lambda)^2 + 4c\delta\alpha}}\right) = \frac{1}{2c}\left(-1 + ((c\alpha - \delta - \lambda)^2 + 4c\delta\alpha)^{\frac{-1}{2}} (\delta + \lambda + c\alpha)\right),$$

welches uns $\grave{R_0} = \frac{1}{2c}\left(-1 + \frac{\lambda + c\alpha}{\sqrt{(c\alpha - \lambda)^2 + 0}}\right) = \frac{1}{2c}\left(-1 + \frac{\lambda + c\alpha}{c\alpha - \lambda}\right) = \frac{1}{2c}\frac{-c\alpha + \lambda + \lambda + c\alpha}{c\alpha - \lambda} = \frac{2\lambda}{2c(c\alpha - \lambda)} = \frac{\lambda}{c(c\alpha - \lambda)}$ gibt.

R_0 ist der Anpassungskoeffizient mit $R_0 = \alpha - \lambda/c$ und so $E[T_u I(T_u < \infty)] \overset{(*)}{=} \frac{\grave{R_0}}{\alpha} e^{-R_0 u} + (1 - \frac{R_0}{\alpha})\, \grave{R_0} u e^{-R_0 u}$.

Division durch $\psi(u) = (1 - \frac{R_0}{\alpha})e^{-R_0 u}$ ergibt die erwartete Zeit des Ruins, unter der Bedingung, dass Ruin eintritt, durch $\quad E[T_{u,c}] = \frac{\grave{R_0}}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\alpha - R_0} + \left(\frac{\alpha - R_0}{\alpha}\right) \grave{R_0} u \left(\frac{\alpha}{\alpha - R_0}\right) = \frac{\grave{R_0}}{\alpha - R_0} + \grave{R_0} u = \frac{c + \lambda u}{c(c\alpha - \lambda)}$ $\quad$ wobei $T_{u,c} = T_u : T_u < \infty$.

Höhere Momente von $T_{u,c}$ können in ähnlicher Weise gefunden werden.

Lasst uns nun $\varphi(u,\delta)$ schreiben als $\varphi(u,\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \omega(u,t)$ und wir wollen ω identifizieren. Beachte, dass $E[e^{-\delta T_u}] = E[e^{-\delta T_u} | T_u < \infty] \Pr(T_u < \infty) + E[e^{-\delta T_u} | T_u = \infty] \Pr(T_u = \infty) = E[e^{-\delta T_{u,c}}]\psi(u)$.

Ferner gilt, da $e^{-\delta T_u} = e^{-\delta T_u} I(T_u < \infty)$ (weil jede Seite dieser Gleichung $e^{-\delta T_u}$ ist wenn $T_u < \infty$ und sonst null ist), dass $E[e^{-\delta T_u} I(T_u < \infty)] = E[e^{-\delta T_u}] = E[e^{-\delta T_{u,c}}]\psi(u)$ und somit $E[e^{-\delta T_{u,c}}] = \frac{\varphi(u,\delta)}{\psi(u)}$ so dass $\varphi(u,\delta)/\psi(u)$ die Laplace Transformation von $T_{u,c}$ ist.

Da $T_{u,c}$ die Dichtefunktion $\frac{1}{\psi(u)}\frac{\partial}{\partial t}\psi(u,t)$ hat, folgt, dass $\omega(u,t) = \frac{\partial}{\partial t}\psi(u,t)$, da $E[e^{-\delta T_u}] = E[e^{-\delta T_{u,c}}]\psi(u) = \int_0^\infty e^{-\delta T_{u,c}} \frac{1}{\psi(u)}\frac{\partial}{\partial t}\psi(u,t)dt \cdot \psi(u) = \int_0^\infty e^{-\delta T_{u,c}} \frac{\partial}{\partial t}\psi(u,t)dt$

Wenn wir $\xi_\delta = 1 - R_\delta/\alpha \Leftrightarrow -R_\delta = (\xi_\delta - 1)\alpha = -\alpha(1 - \xi_\delta)$ setzen, dann ist

$$\varphi(u,\delta) = \xi_\delta \exp\{-\alpha(1 - \xi_\delta)u\} = \exp\{-\alpha u\}\, \xi_\delta \underbrace{\sum_{j=0}^\infty \frac{(\alpha\xi_\delta u)^j}{j!}}_{=\exp(\alpha\xi_\delta u)} = \exp\{-\alpha u\} \sum_{j=0}^\infty \frac{(\alpha u)^j}{j!} \underbrace{\left(1 - \frac{R_\delta}{\alpha}\right)}_{=\xi_\delta}^{j+1}$$

Ferner gilt $1 - \frac{R_\delta}{\alpha} = \frac{1}{2c\alpha}\left(\mathrm{c\alpha} + \lambda + \delta - \sqrt{(c\alpha - \delta - \lambda)^2 + 4c\delta\alpha}\right)$

und da $(c\alpha - \delta - \lambda)^2 + 4c\delta\alpha = (c\alpha + \lambda + \delta)^2 - 4c\alpha\lambda$ ist, gilt:

$$\varphi(u,\delta) = \exp\{-\alpha u\} \sum_{j=0}^\infty \frac{(\alpha u)^j}{j!} \left(\frac{\mathrm{c\alpha} + \lambda + \delta - \overbrace{\sqrt{(c\alpha - \delta - \lambda)^2 + 4c\delta\alpha}}^{\sqrt{(c\alpha + \delta + \lambda)^2 - 4c\lambda\alpha}}}{2\mathrm{c\alpha}}\right)^{\mathrm{j}+1},$$

und diese Laplace Transformation kann Term für Term invertiert werden.
Zuerst setzen wir $s = c\alpha + \lambda + \delta$ und $a = 2\sqrt{c\alpha\lambda}$, so dass wir schreiben können

$$\varphi(u,\delta) = \exp\{-\alpha u\} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha u)^j}{(2c\alpha)^{j+1}} \frac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^{j+1}}{j!} = \frac{\exp\{-\alpha u\}}{2c\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{u}{2c}\right)^j \frac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^{j+1}}{j!}.$$

Viele Inversions-Probleme sind gelöst durch Nachschlagen in Tabellen der Laplace Transformation und wenn wir das tun finden wir, dass wenn gilt $\beta^*(\delta) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \beta(t)\, dt = \left(\delta - \sqrt{\delta^2 - a^2}\right)^v$ dann gilt$\beta(t) = \frac{va^v}{t} I_v(at)$ wobei $I_v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{t}{2})^{2n+v}}{n!(n+v)!}$ eine abgewandelte Bessel-Funktion der Ordnung v genannt wird.
Außerdem beachten bemerke wir, dass für eine Funktion h und eine positive Konstante b gilt:
$\int_0^{\infty} e^{-\delta x} e^{-bx} h(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-(\delta+b)x} h(x) dx = h^*(\delta + b)$.
Unter Verwendung dieser beiden Ergebnisse folgern wir, dass $\varphi(u,\delta)$ die Laplace Transformation von

$$\omega(u,t) = \frac{\exp\{-\alpha u - (\lambda + c\alpha)t\}}{2c\alpha t} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{u}{2c}\right)^j \frac{(j+1)\left(2\sqrt{c\alpha\lambda}\right)^{j+1}}{j!} I_{j+1}\left(2t\sqrt{c\alpha\lambda}\right) \qquad \text{ist.}$$

Wir können die Dichte von $T_{u,c}$ erhalten, welche wir bezeichnen mit $\omega_c(u,t)$, mittels Dividieren von $\omega(u,t)$ durch $\psi(u)$, ergibt da $\psi(u) = \left(1 - \frac{R_0}{\alpha}\right) e^{-R_0 u} = (1 - 1 + \frac{\lambda}{c\alpha}) e^{-\left(\frac{\alpha c - \lambda}{c}\right)u}$ ist

$$\omega_c(u,t) = \frac{\exp\left\{-(\lambda + c\alpha)t - \frac{\lambda u}{c}\right\}}{2\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{u}{2c}\right)^j \frac{(j+1)\left(2\sqrt{c\alpha\lambda}\right)^{j+1}}{j!} I_{j+1}\left(2t\sqrt{c\alpha\lambda}\right). \qquad \textbf{(8)}$$

Man bemerke, dass obwohl Formel (8) kompliziert erscheint, sie trotzdem direkt mit mathematischer Software auszuführen ist. Obwohl diese Näherung nicht zu Lösungen für die Dichte der Zeit des Ruins (unter der Voraussetzung, dass Ruin eintritt) für andere individuelle Schadenswert-Verteilungen zu führen scheint, ist die Bedeutung der Gleichung (8), dass sie einen Weg eröffnet solche Dichten zu approximieren. Der Grund dafür ist, das wir einen klassischen Risiko Prozess approximieren können unter Benutzung der De Vylder`s Methode, und für den approximierten Risiko Prozess ist die Dichte der Zeit des Ruins von der Form die durch Gleichung (8) gegeben ist.

3. Anwendung des diskreten Zeit Modells

Angenommen, dass wir für manchen (kleine) $h > 0$ $\psi(u, jh)$ ausrechnen können mit $j = 1,2,3, \ldots$, und dass wir außerdem $\psi(u)$ berechnen können. Dann ist eine einfache Approximation für die Dichte von $T_{u,c}$ bei jh gegeben durch den Differentenquotienten $\frac{\psi(u,jh) - \psi(u,(j-1)h)}{h\psi(u)}$ **(9)**

Untere Verwendung der Methode, die in Abschnitt 7.9.2 (vor zwei Wochen) beschrieben wurde können wir die Ruinwahrscheinlichkeit sowohl in endliche als auch in unendlicher Zeit approximieren und dann können wir die Approximation mit $j = 1/[(1+\theta)\beta]$ verwenden. Tabelle 8.1 zeigt einige exakte und approximierte Werte der Dichte von $T_{u,c}$ für $u = 40, \lambda = 1$, die individuellen Schadenswert-Verteilung ist exponentiell mit Mittel 1 und c = 1.1.

Table 8.1 *Exact and approximate values of the density of $T_{u,c}$, exponential claims*

t	Exact	Approximate
100	0.001 859	0.001 860
200	0.002 415	0.002 416
300	0.001 827	0.001 829
400	0.001 257	0.001 258
500	0.000 850	0.000 850
600	0.000 576	0.000 576
700	0.000 393	0.000 394
800	0.000 271	0.000 271
900	0.000 189	0.000 189
1000	0.000 132	0.000 133

Die exakten Werte wurden mit Formel (8) berechnet, während die approximierten Werte unter Verwendung der Formel (9) und den Methoden, die in Abschnitt 7.9.2 (vor zwei Wochen) beschrieben wurden, mit $\beta = 2$ berechnet wurden. Die Genauigkeit dieser Methode könnte bewiesen werden durch Verwendung eines größeren Wertes für β, aber die Zahlen in Tabelle 8.1 zeigen an, dass diese Methode zur Berechnung der Dichte von $T_{u,c}$ zuverlässig ist, und in den numerischen Beispielen, die in Abschnitt 4 folgen, verweisen wir auf die Dichten, die mit dieser Methode als die exakte Dichten berechnet wurden.

4. Numerische Illustrationen

Wir illustrieren nun die Erweiterung der De Vylder`s Methode, wie sie am Ende von Abschnitt 2 beschrieben wurde, durch Betrachtung zweier Beispiele. In beiden Fällen zeichnen wir die Dichte von $T_{u,c}$, die durch Näherung des vorherigen Abschnitts mit $\beta = 20$ berechnet wurden, zusammen mit der Dichte von $T_{u,c}$ in De Vylder`s approximierenden Überschuss Prozess.
Als eine erste Illustration betrachten wir den Fall wenn die individuelle Schadenswert-Verteilung eine gemischte exponentielle Verteilung ist mit $F(x) = 1 - \frac{2}{3}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{-x/2}$ für $x \geq 0$, so dass die Verteilung Mittel 1 und Varianz 2 hat. Setze $u = 60,\ \lambda = 1\ und\ \theta = 0{,}1,\ so\ dass\ \psi(60) = 0{,}025$. (Dieser Wert wurde mit der Methode aus Abschnitt 7.9.2 berechnet mit $\beta = 20$.)

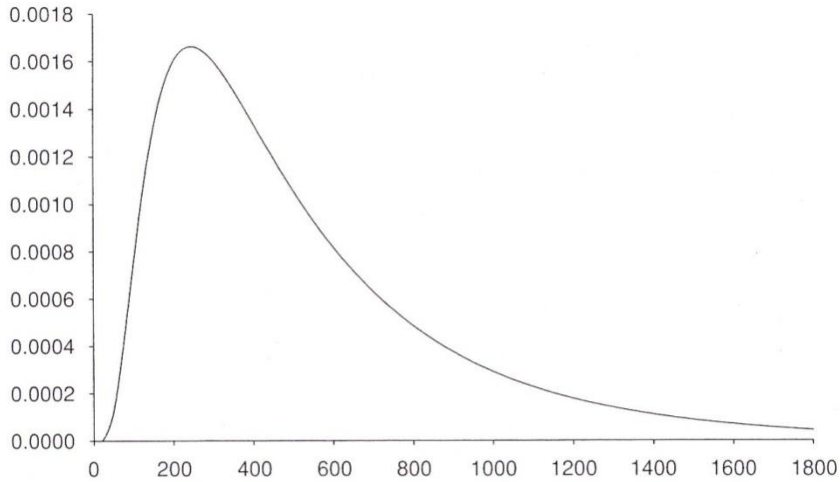

Figure 8.3 Exact and approximate density of $T_{u,c}$ when F is a mixture of two exponentials.

Bild 8.3 zeigt die exakte und die approximierte Dichte-Funktion, aber sie sind praktisch nicht zu unterscheiden und zeigen, dass die De Vylder Approximation in diesem Fall ausgezeichnet ist.

Als eine zweite Illustration betrachten wir eine weitere gemischte exponentielle Verteilung als individuelle Schadenswert-Verteilung mit $F(x) = 1 - 0{,}0040e^{-0{,}0146x} - 0{,}1078e^{-0{,}1902x} - 0{,}8882e^{-5{,}5146x}$ für $x \geq 0$. Diese Verteilung hat Mittel 1 und Varianz 42,2. Setze $u = 400, \lambda = 1\ und\ \theta = 0{,}25, so\ dass\ \psi(400) = 0{,}039$.

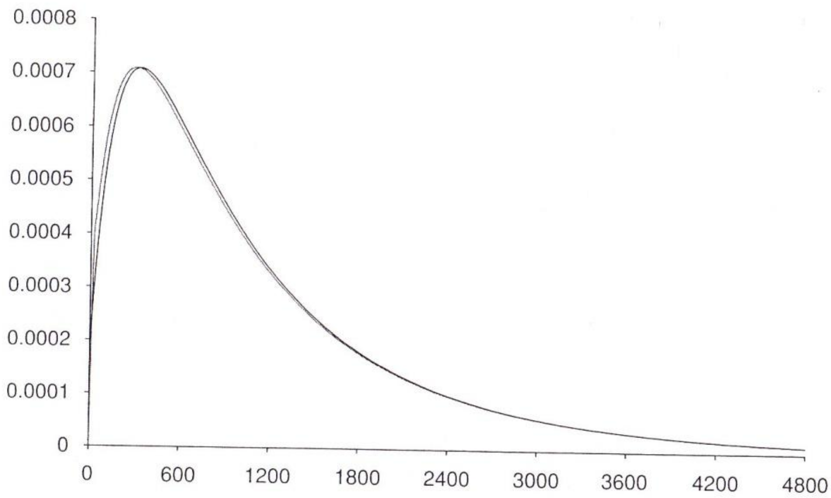

Figure 8.4 Exact and approximate density of $T_{u,c}$ when F is a mixture of three exponentials.

Bild 8.4 zeigt die exakte und die approximierte Dichte-Funktionen und in diesem Fall können wir sehen, dass die beiden Dichtefunktionen sehr eng zusammenliegen, aber nicht so nah wie in Bild 8.3.

In diesem Bild sind die Werte der exakten Dichte größer als die der approximierten Dichte für kleinere Werte von t.

Es ist interessant, dass die auf De Vylder`s Methode basierende Approximation so gut funktioniert, besonders weil De Vylder`s ursprüngliche Intention war eine einfachere Funktion zu approximieren, nämlich ψ. Die Approximation arbeitet nicht unter allen Umständen gut, aber wenn die Ruinwahrscheinlichkeit klein ist (vielleicht im Bereich von 1% bis 5%) und die momenterzeugende Funktion der individuellen Schadenswert-Verteilung existiert, dann scheint die Methode gute Approximationen der Dichte von $T_{u,c}$ zu geben.

5. Dividenden

Nun betrachten wir ein Problem wo ein Versicherungsportfolio benutzt wird um die Dividendenerträge der Aktionäre dieser Versicherungsgesellschaft vorzuschreiben. Lasse u den anfänglichen Überschuss bezeichnen und lasse $b \geq u$ eine Dividenden-Barriere sein. Immer wenn der Überschuss das Level b erreicht wird der Prämienertrag den Aktionären gezahlt als Dividende bis die nächste Forderung erfolgt, so dass in diesem abgeänderten Überschuss-Prozess der Überschuss niemals ein höheres Level als b erreicht. Es ist leicht zu zeigen, dass es sicher ist, dass der Ruin für den abgeänderten Überschuss-Prozess schließlich eintreffen wird.

Lasst uns annehmen, dass die Aktionäre den anfänglichen Überschuss u bereitstellen und das Defizit bei Ruin zahlen. Eine interessante Frage ist wie der Level der Barriere b gewählt werden sollte um den zu erwartenden vorhandenen Wert des Netto-Einkommens der Aktionäre zu maximieren, unter der Voraussetzung, dass es kein weiteres Geschäft nach dem Ruin mehr gibt. Wir definieren $V(u,b)$ als den erwarteten jetzigen Wert der Dividenden zum Zinssatz δ, die den Aktionären vor dem Ruin zu zahlen sind. $Y_{u,b}$ als das Defizit bei Ruin und $T_{u,b}$ als die Zeit des Ruins, so dass $E\left[Y_{u,b} \exp\{-\delta T_{u,b}\}\right]$ den erwarteten vorhandenen Wert des Defizits im Ruin angibt. Dann wollen wir b so wählen,

dass $$L(u,b) = V(u,b) - E\left[Y_{u,b} \exp\{-\delta T_{u,b}\}\right] - u$$
maximal ist und um sich mit dieser Frage zu befassen müssen wir die Komponenten von $L(u,b)$ betrachten.

Wir können einen Ausdruck für $V(u,b)$ finden durch die Standard-Technik der Bedingung auf die Zeit und den Betrag der ersten Forderung. Wir bemerken, dass für $u < b$ – wenn keine Forderung vor der Zeit $\tau = (b-u)/c$ eintritt – dann erreicht der Überschuss-Prozess Level b zur Zeit τ. Also gilt für $0 \leq u < b$

$$V(u,b) = \int_\tau^\infty \lambda e^{-\lambda t}\, e^{-\delta\tau}\, V(b,b)dt + \int_0^\tau \lambda e^{-\lambda t}\, e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} f(x)V(u+ct-x,b)\,dxdt$$

$$= e^{-(\lambda+\delta)\tau}\, V(b,b) + \int_0^\tau \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^{u+ct} f(x)V(u+ct-x,b)\,dxdt.$$

durch die Substitution $s = u + ct \Leftrightarrow t = \frac{s-u}{c}$ erhalten wir (mit $\tau = \frac{b-u}{c} \Leftrightarrow b = c\tau + u$)

$$V(u,b) = e^{-(\lambda+\delta)(b-u)/c}\, V(b,b) + \frac{\lambda}{c}\int_u^b \lambda e^{-(\lambda+\delta)(s-u)/c} \int_0^s f(x)V(s-x,b)\,dxds$$

und durch Differentation bezüglich u bekommen wir

[da $\frac{\partial}{\partial u}\left(e^{\frac{-b\lambda - b\delta + u\lambda + u\delta}{c}}\right) = \frac{\lambda+\delta}{c}\left(e^{\frac{-b\lambda - b\delta + u\lambda + u\delta}{c}}\right)$ und $e^{-(\lambda+\delta)(s-u)/c} = e^0 = 1$ für $s = u$]

$$\frac{\partial}{\partial u}V(u,b) = \frac{\lambda+\delta}{c}V(u,b) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)V(u-x,b)\,dx. \tag{10}$$

Ebenso – unter Berücksichtigung der Dividenden-Zahlungen vor und nach der ersten Forderung – haben wir

$$V(b,b) = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} c\bar{s}_t\,dt + \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \int_0^b f(x)V(b-x,b)\,dxdt \tag{11}$$

wobei $\bar{s}_t = \frac{e^{\delta t}-1}{\delta}$ der angesammelte Betrag der Zahlungen zum Zinssatz δ als Raten von 1 pro Zeiteinheit über $(0,t)$ zurzeit t ist. Integration der Gleichung (11) liefert uns

$$V(b,b) = \frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b f(x)V(b-x,b)\,dx. \tag{12}$$

[da $\lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \cdot c\frac{(e^{\delta t}-1)}{\delta} = \frac{\lambda c}{\delta}\left(e^{-(\lambda+\delta)t} \cdot e^{\delta t} - e^{-(\lambda+\delta)t}\right) = \frac{\lambda c}{\delta}\left(e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda+\delta)t}\right)$ und Integration folgt

$$\frac{\lambda c}{\delta}\left(\frac{1}{-\lambda}e^{-\lambda t} - \frac{1}{-(\lambda+\delta)}e^{-(\lambda+\delta)t}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{\lambda c}{\delta}\left(\frac{1}{-\lambda} - \frac{1}{-(\lambda+\delta)}\right) = \frac{\lambda c}{\delta}\left(\frac{-\lambda-\delta+\lambda}{-\lambda(-\lambda-\delta)}\right) = \frac{\lambda c}{\delta}\left(\frac{-\delta}{\lambda^2+\lambda\delta}\right) = \frac{c}{\lambda+\delta}$$

und außerdem gilt noch $\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\,dt = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}$]

Ausgehend von Gleichung (10) finden wir

$$\frac{c}{\lambda+\delta}\frac{\partial}{\partial u}V(u,b)\bigg|_{u=b} = \frac{c}{\lambda+\delta}\frac{\lambda+\delta}{c}V(b,b) - \frac{c}{\lambda+\delta}\frac{\lambda}{c}\int_0^b f(x)V(b-x,b) = V(b,b) - \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b f(x)V(b-x,b)\,dx$$

was uns zusammen mit Gleichung (12) die Randbedingung $\frac{\partial}{\partial u}V(u,b)\Big|_{u=b} = 1$ gibt,

da $\frac{c}{\lambda+\delta}\frac{\partial}{\partial u}V(u,b)\Big|_{u=b} = \frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b f(x)V(b-x,b)\,dx - \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\int_0^b f(x)V(b-x,b)\,dx = \frac{c}{\lambda+\delta}$.

Beispiel: Sei $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$. Finde einen Ausdruck für $V(u,b)$.

Lösung: *Schreibe Gleichung (10) wie folgt* $\frac{\partial}{\partial u}V(u,b) = \frac{\lambda+\delta}{c}V(u,b) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \alpha e^{-\alpha(u-x)}V(x,b)\,dx$ ***(13)***

die Differentialgleichung zweiter Ordnung ergibt sich dann zu

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}V(u,b) + \left(\alpha - \frac{\lambda+\delta}{c}\right)\frac{\partial}{\partial u}V(u,b) - \frac{\alpha\delta}{c}V(u,b) = 0.$$

Die charakteristische Gleichung dieser Differentialgleichung ist die gleiche wie die von Gleichung (5) und es folgt, dass

$$V(u,b) = \gamma_1 e^{\rho_\delta u} + \gamma_2 e^{-R_\delta u} \qquad \textbf{(14)}$$

wobei ρ_δ und $-R_\delta$ die Wurzeln der Gleichung (5) sind, γ_1 und γ_2 hängen von δ und b ab und die Randbedingung gibt

$$\gamma_1\rho_\delta\, e^{\rho_\delta\, b} - \gamma_2 R_\delta e^{-R_\delta\, b} = 1.$$

Wir können nun die Funktionsform (14) von $V(u,b)$ in die Gleichung (13) einsetzen wie in unsere Herleitung von φ aus dem letzten Abschnitt mit den dort verwendeten Argumente ergibt sich $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = -\frac{\alpha-\rho_\delta}{\alpha-R_\delta}$ und so

$$V(u,b) = \frac{(\alpha-\rho_\delta)e^{\rho_\delta u} - (\alpha-R_\delta)e^{-R_\delta u}}{(\alpha-\rho_\delta)\rho_\delta\, e^{\rho_\delta u} - (\alpha-R_\delta)R_\delta e^{-R_\delta u}}.$$

Sei nun $\varphi_b(u) = E\left[Y_{u,b}\exp\{-\delta T_{u,b}\}\right]$. Dann erhalten wir wieder durch Bedingung auf die Zeit und den Betrag der ersten Forderung und egal ob die erste Forderung vor der Zeit τ eintritt oder nicht

$$\varphi_b(u) = \int_0^\tau \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\int_{u+ct}^\infty (y-u-ct)f(y)\,dydt + \int_\tau^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\int_b^\infty (y-b)f(y)\,dydt$$

$$+\int_0^\tau \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\int_0^{u+ct} f(y)\varphi_b(u+ct-y)\,dydt + \int_\tau^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\int_0^b f(y)\varphi_b(b-y)\,dydt$$

das führt nachdem man die Standart-Substiution $s = u + ct$ gemacht hat zu

$$ce^{-\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}\varphi_b(u) = \int_u^b \lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}}\int_s^\infty (y-s)f(y)\,dyds + \int_b^\infty \lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}}\int_b^\infty (y-b)f(y)\,dyds$$

$$+\int_u^b \lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}}\int_0^s f(y)\varphi_b(s-y)\,dyds + \int_b^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)s/c}\int_0^b f(y)\varphi_b(b-y)\,dyds$$

Differentation führt dann zu

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi_b(u) = \frac{\delta+\lambda}{c}\varphi_b(u) - \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (y-u)f(y)\,dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(y)\varphi_b(u-y)\,dy, \qquad \textbf{(15)}$$

da $\varphi_b(u) = \frac{1}{c}e^{\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}\left(\int_u^b \lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}}\int_s^\infty (y-s)f(y)\,dyds + \int_b^\infty \lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}}\int_b^\infty (y-b)f(y)\,dyds\right) +$
$\frac{1}{c}e^{\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}\left(\int_u^b \lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}}\int_0^s f(y)\varphi_b(s-y)\,dyds + \int_b^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)s/c}\int_0^b f(y)\varphi_b(b-y)\,dyds\right)$

und somit

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi_b(u) = \frac{\delta+\lambda}{c}\varphi_b(u) - \frac{1}{c}e^{\frac{(\lambda+\delta)u}{c}}\cdot\left(\lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}}\int_u^\infty (y-u)f(y)\,dy + 0 + \lambda e^{-\frac{(\lambda+\delta)s}{c}}\int_0^u f(y)\varphi_b(u-y)\,dy + 0\right)$$

Ferner gilt

$$\varphi_b(b) = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\left[0 + \int_b^\infty (y-b)f(y)\,dy + 0 + \int_0^b f(y)\varphi_b(b-y)\,dy\right]dt$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\delta}\left[\int_b^\infty (y-b)f(y)\,dy + \int_0^b f(y)\varphi_b(b-y)\,dy\right]$$

und wie Gleichung (15) ergibt

$$\varphi_b(b) = \frac{c}{\delta+\lambda}\frac{\partial}{\partial u}\varphi_b(u)\Big|_{u=b} + \frac{\lambda}{\delta+\lambda}\left[\int_b^\infty (y-b)f(y)\,dy + \int_0^b f(y)\varphi_b(b-y)\,dy\right]$$

$$da \quad \frac{\delta+\lambda}{c}\varphi_b(u) = \frac{\partial}{\partial u}\varphi_b(u) + \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (y-u)f(y)\,dy + \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(y)\varphi_b(u-y)\,dy$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi_b(u) = \frac{c}{\delta+\lambda}\frac{\partial}{\partial u}\varphi_b(u) + \frac{c}{\delta+\lambda}\frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (y-u)f(y)\,dy + \frac{c}{\delta+\lambda}\frac{\lambda}{c}\int_0^u f(y)\varphi_b(u-y)\,dy$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi_b(u) = \frac{c}{\delta+\lambda}\frac{\partial}{\partial u}\varphi_b(u) + \frac{\lambda}{\delta+\lambda}\left[\int_u^\infty (y-u)f(y)\,dy + \int_0^u f(y)\varphi_b(u-y)\,dy\right]$$

erhalten wir die Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi_b(u)\Big|_{u=b} = 0.$$

<u>Beispiel</u>: Sei $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$. Finde einen Ausdruck für $\varphi_b(u)$.

<u>Lösung</u>: *Durch Fortschreiten wie in der Lösung von Beispiel 1 erhalten wir*

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi_b(u) = \frac{\delta+\lambda}{c}\varphi_b(u) - \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty (y-u)\alpha e^{-\alpha y}\,dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \alpha e^{-\alpha(u-y)}\varphi_b(y)\,dy \qquad \textit{(16)}$$

und demzufolge $\frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi_b(u) + \left(\alpha - \frac{\delta+\lambda}{c}\right)\frac{\partial}{\partial u}\varphi_b(u) - \frac{\alpha\delta}{c}\varphi_b(u) = 0.$

Es folgt daraus, dass $\varphi_b(u) = \eta_1 e^{\rho_\delta u} + \eta_2 e^{-R_\delta u}$ ***(17)***

wobei wieder ρ_δ und $-R_\delta$ die Wurzeln der Gleichung (5) sind und η_1 und η_2 von δ und b abhängen. Fortfahren wie in der Lösung zum Beispiel 2 und Einsetzen der Funktionsform (17) von $\varphi_b(u)$ in Gleichung (16) ergibt

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\eta_1 \alpha}{\alpha + \rho_\delta} + \frac{\eta_2 \alpha}{\alpha - R_\delta} \qquad \textbf{(18)}$$

und die Randbedingung ergibt $\eta_1 \rho_\delta\, e^{\rho_\delta u} - \eta_2 R_\delta e^{-R_\delta u} = 0$, *so dass* $\dfrac{\eta_1}{\eta_2} = \dfrac{R_\delta e^{-R_\delta b}}{\rho_\delta\, e^{\rho_\delta b}}$.

Division der Gleichung (18) durch η_2 *ergibt*

$\eta_2 = \frac{1}{\alpha^2} \frac{(\alpha+\rho_\delta)(\alpha-R_\delta)\rho_\delta\, e^{\rho_\delta b}}{(\alpha+\rho_\delta)\rho_\delta\, e^{\rho_\delta b} + (\alpha-R_\delta) R_\delta e^{-R_\delta b}}$ *und da* $\frac{1}{\alpha}(\alpha + \rho_\delta)(\alpha - R_\delta) = \frac{\lambda}{c}$

(weil $\rho_\delta R_\delta = \alpha\delta / c$ *und* $R_\delta - \rho_\delta = \alpha - (\lambda + \delta)/c$ *) haben wir*

$$\varphi_b(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} \frac{\rho_\delta\, e^{\rho_\delta b - R_\delta u} + R_\delta e^{-R_\delta b + \rho_\delta u}}{(\alpha+\rho_\delta)\rho_\delta\, e^{\rho_\delta b} + (\alpha - R_\delta) R_\delta e^{-R_\delta b}}$$

Für den Rest dieses Abschnitts setzen wir voraus, dass individuelle Schadenswert-Verteilung exponentiell ist mit arithmetischem Mittel 1/α, so dass wir eine explizite Lösung für $L(u,b)$ haben.
Wenn wir die Ableitung von $L(u,b)$ nach b nehmen finden wir nach ein paar Vereinfacherungen, dass

$$\frac{\partial}{\partial b} L(u,b) = \frac{-(\alpha + \rho_\delta) e^{\rho_\delta u} + (\alpha - R_\delta) e^{-R_\delta u}}{((\alpha + \rho_\delta)\rho_\delta\, e^{\rho_\delta b} + (\alpha - R_\delta) R_\delta e^{-R_\delta b})^2} \left((\alpha + \rho_\delta)\rho_\delta{}^2 e^{\rho_\delta b} - (\alpha - R_\delta) R_\delta{}^2 e^{-R_\delta b}\right) + \frac{\lambda}{\alpha c} \frac{\rho_\delta R_\delta (\rho_\delta + R_\delta) e^{(\rho_\delta - R_\delta) b}((\alpha + \rho_\delta) e^{\rho_\delta u} - (\alpha - R_\delta) e^{-R_\delta u})}{((\alpha + \rho_\delta)\rho_\delta\, e^{\rho_\delta b} + (\alpha - R_\delta) R_\delta e^{-R_\delta b})^2}$$

und es ist leicht zu zeigen, dass diese partielle Ableitung null ist, wenn

$$(\alpha + \rho_\delta)\rho_\delta{}^2 e^{\rho_\delta b} - (\alpha - R_\delta) R_\delta{}^2 e^{-R_\delta b} = \frac{\lambda}{\alpha c} \rho_\delta R_\delta (\rho_\delta + R_\delta) e^{(\rho_\delta - R_\delta) b}. \qquad \textbf{(19)}$$

Die Lösung von Gleichung (19) ist der optimale Barriere-Level unter unserem Kriterium der Maximierung des zu erwartenden Wertes des Netto-Einkommens der Aktionäre. Genau genommen haben wir das nicht bewiesen und wir sollten die zweite Ableitung von $L(u,b)$ berücksichtigen. Bild 8.7 veranschaulicht $L(u,b)$ für einen Bereich von Werten von b wenn α = 1, λ = 100, c = 110 und $\delta = 0{,}1$ ist, resultierend in $\rho_\delta = 0{,}00917$ und $R_\delta = 0{,}09917$.

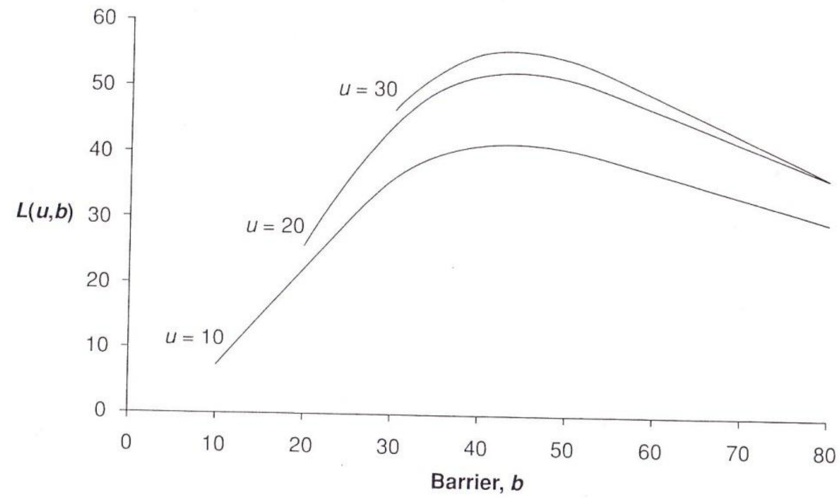

Figure 8.7 $L(u, b)$ for different values of u.

Wie aus Gleichung (19) klar ist, ist der optimale Barriere-Level unabhängig von u und so wird Gleichung (19) zu

$$0{,}0088 e^{\rho_\delta b} - 0{,}88589 e^{-R_\delta b} = 0{,}00895 e^{(\rho_\delta - R_\delta) b}$$

und die optimale Barriere ist 43,049.