Seminarvortrag von Xiaotong Guo am 26. Mai 2009

5. Das individuelle Risikomodell
5.1 Einleitung

Gesamtschadensumme (kollektive Risikomodell) $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$

- N : die Anzahl Einzelsch□den ,ZV
- X_i: die Schadenh□he ,ZV

  X_i ist identisch verteilt

- $N, X_1, X_2, \ldots$ stochastisch unabh□ngig

Gesamtschadensumme (individuelle Risikomodell) $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$

- n : die Anzahl Vertr□gen (Policen)
- S_i : Schaden der i-ten Police ,ZV

  S_i stochastisch unabh□ngig , nicht unbedingt identisch verteilt

5.2 Das individuelle Modell

Notation1 :
Erwartungswert und Varianz von der Gesammtschadensumme

$$E(S) = \sum_{i=1}^{n} E(S_i) \text{ und } V(S) = \sum_{i=1}^{n} V(S_i) \tag{5.1}$$

Notation2 :
falls ein Schaden in der i-te Police eintritt , die Schadensumme wird als Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_i modelliert , so dass $F_i(0) = 0$ mit Mittelwert μ_i und Varianz σ_i^2 , S_i ist definiert als zusamengesetzte binomial verteilung , da die Schadenanzahl in der i-te Police $B(1, q_i)$ verteilt . Folgt aus dem Paragraph 4.2.2 die Formeln (4.5) und (4.6)

$$E(S_i) = q_i \mu_i \text{ und } V(S_i) = q_i \sigma_i^2 + q_i (1 - q_i) \mu_i^2 \tag{5.2}$$

q_i ist die Sterbewahrscheinlichkeit des Versicherungsnehmers in der i-te Police .

Wir nehmen in den folgenden zwei Paragraphen an , dass die Leistung einer Lebensversicherung fixiert ist , so dass μ_i Nennbetrag von i-te Police und $\sigma_i^2 = 0$ f□r alle i .

5.3 De Pril□s Rekursionsformel

Mann kann die Gesamtschadenverteilung im individuellen Risikomodell mittels der De Pril Rekursionsformel
approximieren.

Die Vertr□ge eines Portfolios werden in Nennbetrag- und Sterblichkeitsklassen eingeordnet Annahme :

i **Nennbetrag einer Police mit** $i=1,2,\ldots,I$ **(** I **ist ganze Zahl)**

q_j **Sterbewahrscheinlichkeit der Policen in dembetrachteten Haftungszeitraum mit**

$j=1,2,\ldots,J$

n_{ij} **Anzahl der Policen mit Sterbewahrscheinlichkeit** q_j **und Nennbetrag** i **mit**

$i=1,2,\ldots,I \;\; j=1,2,\ldots,J$

$g_x=\Pr(S=x)$ **die Wahrscheinlichkeit , dass** S **genau** x **Einheiten betr□gt .**

Die Wahrscheinlichkeitserzeugendenfunktion der Schadensumme eines VN mit q_j **und** i **:**

$$P_{ij}(r)=1-q_j+q_j r^i$$

Wegen der Unabhängigkeit der VN ergibt sich die Wahrscheinlichkeitserzeugendenfunktion der ZV S :

$$P_s(r)=\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}(1-q_j+q_j r^i)^{n_{ij}}=\sum_{x=0}^{\infty} r^x g_x$$

Nach der Logarithmengesetze ergibt sich :

$$\log P_s(r)=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\log(1-q_j+q_j r^i) \qquad (5.3)$$

Idee : Das Ziel ist es , eine Identität aufzubauen , die aus der Erzeugendenfunktion P_s und ihrer Ableitung besteht , und diese Identität auch als Potenzfolge in r darzustellen . Dann können wir mittels Koeffizientenvergleich der Potenzen von r , eine Formel für g_x herleiten .

Ableitung nach r :

$$\frac{d}{dr}\log P_s(r)=\frac{P'_s(r)}{P_s(r)}=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\frac{q_j i r^{i-1}}{1-q_j+q_j r^i}$$

Multiplizieren $rP_s(r)$, so dass

$$rP'_s(r)=P_s(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\, i\,\frac{q_j r^i}{1-q_j+q_j r^i}$$

$$=P_s(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\, i\,\frac{q_j r^i}{1-q_j}\,\frac{1-q_j}{1-q_j+q_j r^i}$$

$$=P_s(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\, i\,\frac{q_j r^i}{1-q_j}\left(\frac{1-q_j+q_j r^i}{1-q_j}\right)^{-1}$$

$$= P_s(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} i \frac{q_j r^i}{1-q_j}(1-(-\frac{q_j r^i}{1-q_j}))^{-1}$$

$$= P_s(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} i \frac{q_j r^i}{1-q_j}\sum_{k=1}^{\infty}(-\frac{q_j r^i}{1-q_j})^{k-1}$$

$$= P_s(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} i \frac{q_j r^i}{1-q_j}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(\frac{q_j r^i}{1-q_j})^{k-1}$$

Mit $\left|\frac{q_j r^i}{1-q_j}\right| < 1 \ \forall\ i, j$

Vereinfachen wir diese Formel als :

$$rP'_s(r) = P_s(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} i \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(\frac{q_j}{1-q_j})^k r^{ik} \qquad (5.4)$$

Wir definieren die Funktion

$$h(i,k) = i(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}(\frac{q_j}{1-q_j})^k$$

Für $i = 1, 2, \ldots I$ sonst 0

So dass

$$rP'_s(r) = P_s(r)\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{\infty} r^{ik} h(i,k) \qquad (5.5)$$

Wissen wir die Wahrscheinlichkeitserzeugendenfunktion der ZV S :

$$P_s(r) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x g_x$$

und

$$rP'_s(r) = r\sum_{x=0}^{\infty} x r^{x-1} g_x = \sum_{x=0}^{\infty} x r^x g_x$$

In (5.5) Summenformel :

$$\sum_{x=0}^{\infty} x r^x g_x = \sum_{x=0}^{\infty} r^x g_x \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{\infty} r^{ik} h(i,k) = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{\infty} r^{x+ik} g_x h(i,k) \qquad (5.6)$$

Für x =1,2,3,...

Auf der linken Seite , der Koeffizient von r^x ist xg_x

Auf der rechten Seite , um den koeffizient von r^x zu finden , Summation von $g_{x-ik}h(i,k)$ über alle i,k mit $1 \le ik \le x$,

$[x/i]$ ist die nächstkleinere ganze Zahl von x/i , so dass

$$xg_x = \sum_{i=1}^{x}\sum_{k=1}^{[x/i]} g_{x-ik} h(i,k) \ \forall\ x = 1, 2, 3, \ldots$$

Deswegen

$$g_x = \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{x}\sum_{k=1}^{[x/i]} g_{x-ik} h(i,k) \;\; \forall \;\; x = 1,2,3,\ldots$$

Weil $h(i,k) = 0$ für $i > I$, d.h. i sollte min. von x und I sein ,

$$g_x = \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{\min[x,I]}\sum_{k=1}^{[x/i]} g_{x-ik} h(i,k) \;\; \forall \;\; x = 1,2,3,\ldots$$

Der Startwert der Rekursionsformel ist

$$g_0 = \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}(1-q_j)^{n_{ij}}$$

Sei K eine positive ganze Zahl , def.

$$g_0^K = g_0 \qquad (5.7)$$

Und

$$g_x^K = \frac{1}{x}\sum_{i=1}^{\min[x,I]}\sum_{k=1}^{\min(K,[x/i])} g_{x-ik}^K h(i,k) \qquad (5.8)$$

Für $x = 1,2,3,\ldots$

In der Praxis ist $K = 4$ ausreichend , eine gute Approximation für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von S erhalten . sei $q_j < 1/2$

$$\sum_{x=0}^{m^*}\left|g_x - g_x^K\right| \le \exp\{\delta(K)\} - 1$$

Mit

$$m^* = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} i n_{ij}$$

der maximale Gesamtschadenbetrag . Und

$$\delta(K) = \frac{1}{K+1}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\frac{1-q_j}{1-2q_j}\left(\frac{q_j}{1-q_j}\right)^{K+1} \qquad (5.9)$$

5.4 Kornya□s Methode

Kornya□s Methode liefert uns ein Mittel , die Verteilung von S zu approximieren .

Notation : $p_j = 1 - q_j$

Die Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von S ist

$$P_s(r) = \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}(p_j + q_j r^i)^{n_{ij}}$$

Da $p_j + q_j = 1$, folgt :

$$p_j + q_j r^i = \frac{p_j + q_j r^i}{p_j}\frac{p_j}{p_j + q_j}$$

$$= (1+\frac{q_j}{p_j}r^i)(1+\frac{q_j}{p_j})^{-1}$$

In der Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von S einsetzen , haben wir :

$$P_s(r) = \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}(1+\frac{q_j}{p_j}r^i)^{n_{ij}}(1+\frac{q_j}{p_j})^{-n_{ij}}$$

Ann : $q_j < 1/2\ \forall j$, dann gilt f□r $\left|\frac{q_j r^i}{p_j}\right| < 1$

Nach der Logarithmengesetze :

$$\log P_s(r) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\left[\log(1+\frac{q_j}{p_j}r^i) - \log(1+\frac{q_j}{p_j})\right]$$

Mit der Logarithmusreihe $\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$ und $x = 1+\frac{q_j}{p_j}r^i$ bzw $1+\frac{q_j}{p_j}$

$$= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left[(\frac{q_j}{p_j}r^i)^k - (\frac{q_j}{p_j})^k\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\left[(\frac{q_j}{p_j}r^i)^k - (\frac{q_j}{p_j})^k\right]$$

Def.

$$Q_s(r) = \log P_s(r) \text{ und}$$

Def.

$$S_k(r) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\left[(\frac{q_j}{p_j}r^i)^k - (\frac{q_j}{p_j})\right]$$

So dass

$$Q_s(r) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}S_k(r)$$

Und def.

$$Q_K(r) = \sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^{k+1}}{k}S_k(r)$$

So dass Q_K die erste K-Terme von Q_s enth□lt

Wir wissen

$$P_s(r) = \exp\{Q_s(r)\} = \sum_{x=0}^{\infty} r^x g_x$$

Def.

$$P_K(r) = \exp\{Q_K(r)\} = \sum_{x=0}^{\infty} r^x g_x^{(K)} \qquad (5.10)$$

Das Ziel ist die Werte von $g_x^{(K)}$ zu bestimmen , damit wir $\sum_{x=0}^{y} \left| g_x^{(K)} \right|$ als Approximation f□r $\sum_{x=0}^{y} g_x$ anwenden .

Wir nutzen hier absolut Betr□ge von $g_x^{(K)}$, da die Konstruktion nicht gew□hrleistet , dass diese Werte immer positiv sind .

Wir schreiben $Q_K(r)$ als

$$Q_K(r) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x b_x^{(K)}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left[(\frac{q_j}{p_j} r^i)^k - (\frac{q_j}{p_j})^k \right] \quad (5.11)$$

Bestimmen $b_x^{(K)}$ f□r $x = 1, 2, 3, \ldots$ betrachten wir der Koeffizient von r^x

der Koeffizient von r^0

$$b_0^{(K)} = \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^k}{k} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} (\frac{q_j}{p_j})^k$$

Um der Koeffizient von r^x mit $x = 1, 2, 3, \ldots$ zu finden , wir m□ssen $ik = x$ zu lassen ,

summieren wir □ber alle k der Koeffizient f□t $ik = x$

$$\frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} (\frac{q_j}{p_j})^k$$

Die Grenze von k sind folgendes

(i) k muss der Teiler von x sein .

(ii) i ist der Nennbetrag , I ist der maximale Nennbetrag . wenn $ki = x$ und $i \le I$, folgt $x \le kI$ bzw. $k \ge x/I$. (Bsp: $x = 6$ und $I = 4$, dann $k = 2, 3, 6$)

(iii) Die obergrenze der Gesamtschadensumme entweder x oder K . (Bsp: K=4, die obergrenze ist 3 , weil 4 ist nicht Teiler von 6.)

Deswegen ,

$$b_x^{(K)} = \sum_{k=\{x/I\}, k/x}^{\min(K,x)} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{j=1}^{J} n_{x/k,j} (\frac{q_j}{p_j})^k \quad (5.12)$$

Wobei k/x bedeute k teilt x , $\{x/I\}$ bezeichnet die kleinste ganze Zahl grosser gleich x/I .

wenn $x \le I$, die untergrenze der Gesamtschadensumme ist 1 .

$$g_x^{(K)} = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{x} j b_j^{(K)} g_{x-j}^{(K)} \quad (5.13)$$

Für $x = 1, 2, 3, \ldots$ mit $g_0^{(K)} = \exp\left\{ b_0^{(K)} \right\}$.

Von Gleichung (5.10) sehen wir

$$P_K^{'}(r) = Q_K^{'}(r) P_K(r)$$

In der Summeformel

$$\sum_{x=1}^{\infty} x r^{x-1} g_x^{(K)} = \sum_{x=1}^{\infty} x r^{x-1} b_x^{(K)} \sum_{y=0}^{\infty} r^y g_y^{(K)}$$

Von der Gleichung (5.13) folgt durch Suchen von der Koeffizient r^x

Start Werte f□r Rekursionsformel folgt von

$$P_K(0) = g_0^{(K)} = \exp\{Q_K(0)\} = \exp\{b_0^{(K)}\}$$

Sei $x > IK$, die Untergrenze von Summation in (5.12) ist grosser als die Obergrenze , $b_x^{(K)} = 0$ für $x > IK$

Deswegen für $x = 1, 2, 3, \ldots$

$$g_x^{(K)} = \frac{1}{x} \sum_{j=1}^{\min(x, IK)} j b_j^{(K)} g_{x-j}^{(K)}$$

Je gr□sser K ist , desto besser die Approximation
In der Praaxis kann man schon bei der Werte von K=4 gute Resultate approximieren .

Unter der Annahme , $q_j < 1/3$ f□r alle j

$$\sup_y \left| \sum_{x=0}^{y} g_x - \sum_{x=0}^{y} \left| g_x^{(K)} \right| \right| \le \exp\{\sigma(K)\} - 1$$

wobei

$$\sigma(K) = \frac{8}{3(K+1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{k+1} \qquad (5.14)$$

Korny□s Methode ist ein effizient rechenbetont Tool , welche einfach anwendbar ist

5.5 Die Zusammengesetzte Poisson Approximation

Die Verteilung der Gesamtschadensumme kann durch eine Zusammengesetzte Poisson Verteilung approximiert werden und Fehlerschranken dieser Approximation angegeben .
Die Annahme von letztem zwei Paragraph , die Schadensumme fixiert , wird nachgelassen .
Deswegen klassifizieren wir die Versicherungsnehmer nicht mehr in Sterbewahrsscheinlichkeiten und Nennbeträge der Police .

Sei G_i die Verteilungsfunktion der Schadenhöhe , die unter i-te Police ausgezahlt wird . G_i einfach Zusammengesetzte binomial verteilt.

Ann : die Schädensumme sind nicht negative und $p_i = 1 - q_i$, Wir haben

$$G_i(x) = p_i + q_i F_i(x)$$

für $x \ge 0$ und für $i = 1, 2, \ldots, n$ und G ist gegeben durch

$$G(x) = G_1 * G_2 * \ldots * G_n(x) = \mathop{*}_{i=1}^{n} G_i(x)$$

Es ist nicht einfach , die Faltung von Zusammengesetzte binomial Verteilung darzustellen

Idee : für $i = 1, 2, \ldots, n$, Wir können G_i durch P_i approximieren , wobei P_i Zusammengesetzte Poisson verteilt ist und approximieren wir G durch P wobei

$$P(x) = \mathop{*}_{i=1}^{n} P_i(x)$$

Dann ist P eine Zusammengesetzte Poisson Verteilung , wir legen fest

$$P_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^n}{n!} F_i^{n*}(x)$$

für $x \geq 0$ und für $i = 1, 2, ..., n$

G_i, P_i Sind beide Zusammengesetzte Verteilung , haben unterschiedliche schadenanzahlverteilung , aber gleiche individuale Schadensummeverteilung .

Es gibt zwei Wege :

1. $\lambda_i = q_i$, so dass erwartete Schadenanzahl in exakte binomial Verteilung und approximierte poisson Verteilung gleich ist .
2. $\exp\{-\lambda_i\} = p_i$, so dass Wahrscheinlichkeit von keine Schaden eintritt in beide Verteilung gleich ist .

Tabelle5.1Methode Vergleich von Wählen von λ_i

	$\lambda_i = q_i$		$\exp\{-\lambda_i\} = p_i$	
q_i	λ_i	$\Pr(N_i > 1)$	λ_i	$\Pr(N_i > 1)$
0.1	0.1	0.0047	0.1054	0.0052
0.01	0.01	5×10^{-5}	0.0101	5×10^{-5}
0.001	0.001	5×10^{-7}	0.0010	5×10^{-7}
0.0001	0.0001	5×10^{-9}	0.0001	5×10^{-9}

Tabelle 5.1 zeigt uns die Werte von λ_i mit verschiedene q_i , und die Werte von $\Pr(N_i > 1)$ mit $N_i \sim \mathrm{P}(\lambda_i)$. Es ist klar , für kleine q_i , die zwei Methode fast gleiche Werte von λ_i zeigt und ein gute Approximation zur $\mathrm{B}(1, q_i)$ produziert . Die Wahrscheinlichkeit , dass von mehr als ein Schaden eintritt ist unter jede approximation der poisson Verteilung nicht Null , aber genügend nahe zu Null .

Das Hauptergebnis dieses Paragraphs ist folgendes :

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i - e^{-\lambda_i})^- \leq G(x) - P(x) \leq \sum_{i=1}^{n} (p_i - e^{-\lambda_i} + (q_i - \lambda_i e^{-\lambda_i})^+) \qquad (5.15)$$

Für alle x , wobei $z^+ = \max(0, z)$ und $z^- = \min(0, z)$

Um diese Ergebnis zu beweisen , benötigen wir zwei Hilfsaussage:

(i)Seien F, G, H Verteilungsfunktion und a, b konstanten , so dass

$$a \leq F(x) - G(x) \leq b$$

für alle x , dann

$$a \leq F * H(x) - G * H(x) \leq b \qquad (5.16)$$

für alle x

Bew : $F*H(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)dH(y)$

$$F*H(x)-G*H(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(x-y)-G(x-y)\right]dH(y)$$

$$\Rightarrow a\le F(x-y)-G(x-y)\le b$$

(ii)Seien $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ und $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ Verteilungsfunktion und

$$a_i\le F_i(x)-G_i(x)\le b_i$$

Für alle x und für $i=1,2,\dots,n$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\le \mathop{*}_{i=1}^{n}F_i(x)-\mathop{*}_{i=1}^{n}G_i(x)\le\sum_{i=1}^{n}b_i \qquad (5.17)$$

Bew : $n=1$ $a_1\le F_1(x)-G_1(x)\le b_1$

$$n=k-1\quad \sum_{i=1}^{k-1}a_i\le \mathop{*}_{i=1}^{k-1}F_i(x)-\mathop{*}_{i=1}^{k-1}G_i(x)\le\sum_{i=1}^{k-1}b_i \qquad (5.18)$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}a_i\le (\mathop{*}_{i=1}^{k-1}F_i)*F_k(x)-(\mathop{*}_{i=1}^{k-1}G_i)*F_k(x)\le\sum_{i=1}^{k-1}b_i \qquad (5.19)$$

Also $a_k\le F_k(x)-G_k(x)\le b_k$

Ereignis in (5.16)

$$a_k\le F_k*(\mathop{*}_{i=1}^{k-1}G_i)(x)-G_k(\mathop{*}_{i=1}^{k-1}G_i)(x)\le b_k \qquad (5.20)$$

Addieren (5.19) und (5.20) ist die Behauptung .

Jetzt beweisen wir (5.15)

Erinnerung Def. Von G und P :

$$G(x)=\mathop{*}_{i=1}^{n}G_i(x) \text{ und } P(x)=\mathop{*}_{i=1}^{n}P_i(x)$$

Wegen (5.17) wissen wir Gleichung (5.15) gilt für alle n

Deswegen zeigen wir für $x\ge 0$, wir haben

$$G_i(x)=p_i+q_iF_i(x) \text{ und}$$

$$P_i(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda_i}\frac{\lambda_i^n}{n!}F_i^{n*}(x)$$

Zuerst zur zeigen : $(p_i-e^{-\lambda_i})^{-}\overset{(2)}{\le}G_i(x)-P_i(x)\overset{(1)}{\le}(p_i-e^{-\lambda_i}+(q_i-\lambda_i e^{-\lambda_i})^{+})$

Daher für (1)

$$G_i(x) - P_i(x) = p_i + q_i F_i(x) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^n}{n!} F_i^{n*}(x)$$

$$= p_i + q_i F_i(x) - e^{-\lambda_i} \lambda_i^0 F_i^{0*}(x) - e^{-\lambda_i} \lambda_i^1 F_i^{1*}(x) - \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^n}{n!} F_i^{n*}(x)$$

$$= (p_i - e^{-\lambda_i}) + (q_i - e^{-\lambda_i} \lambda_i) F_i(x) - \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^n}{n!} F_i^{n*}(x)$$

$$\leq (p_i - e^{-\lambda_i}) + (q_i - e^{-\lambda_i} \lambda_i) F_i(x)$$

$$\leq (p_i - e^{-\lambda_i}) + (q_i - e^{-\lambda_i} \lambda_i)^+$$

Da wenn $(q_i - \lambda_i e^{-\lambda_i}) < 0$, gilt $(q_i - \lambda_i e^{-\lambda_i}) F_i(x) < 0 = (q_i - \lambda_i e^{-\lambda_i})^+$

Oder wenn $(q_i - \lambda_i e^{-\lambda_i}) \geq 0$, gilt $(q_i - \lambda_i e^{-\lambda_i}) F_i(x) = (q_i - \lambda_i e^{-\lambda_i})^+ F_i(x) \leq (q_i - \lambda_i e^{-\lambda_i})^+$

Für (2)

Wissen $F_i \geq F_i^{n*}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$ dann

$$G_i(x) - P_i(x) = p_i + q_i F_i(x) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^n}{n!} F_i^{n*}(x)$$

$$\geq p_i + q_i F_i(x) - e^{-\lambda_i} \lambda_i^0 F_i^{0*}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^n}{n!} F_i(x)$$

$$= (p_i - e^{-\lambda_i}) + (q_i - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^n}{n!}) F_i(x)$$

$$= (p_i - e^{-\lambda_i}) + (q_i - (\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^n}{n!} - e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^0}{0!})) F_i(x)$$

$$= (p_i - e^{-\lambda_i}) + (q_i - (e^{-\lambda_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^n}{n!} - e^{-\lambda_i})) F_i(x)$$

$$= (p_i - e^{-\lambda_i}) + (q_i - (e^{-\lambda_i} e^{\lambda_i} - e^{-\lambda_i})) F_i(x)$$

$$= (p_i - e^{-\lambda_i}) + (q_i - (1 - e^{-\lambda_i})) F_i(x)$$

$$= (p_i - e^{-\lambda_i}) + (e^{-\lambda_i} - p_i) F_i(x)$$

$$\geq (p_i - e^{-\lambda_i}) + (e^{-\lambda_i} - p_i)^-$$

Da wenn $e^{-\lambda_i} - p_i \geq 0$, gilt $(e^{-\lambda_i} - p_i)^- = 0 \leq (e^{-\lambda_i} - p_i) F_i(x)$

Oder wenn $e^{-\lambda_i} - p_i < 0$, gilt $(e^{-\lambda_i} - p_i) F_i(x) = (e^{-\lambda_i} - p_i)^- F_i(x) \geq (e^{-\lambda_i} - p_i)^-$

Weil $z + (-z)^- = z^-$ wir haben bewiesen

$$G_i(x) - P_i(x) \geq (p_i - e^{-\lambda_i})^-$$

Wegen Aussage (ii) haben wir (5.15) für $x \geq 0$ abgeschlossen .

5.6 Numerische Illustration

Tabelle 5.2 zeigt die Anzahl der Versicherungsnahmer mit Nennbetrag und Sterbewahrscheinlichkeit im Alter 45-54 für hypothetische Portfolio von Lebensversicherungspolicen.

Tabelle5.2 Sterbewahrscheinlichkeit und Nennbeträge

Alter	Nenn-Betrag	Sterbewahrscheinlichkeit rate, $\times 10^3$	Anzahl der Versicherungsnehmer
45	15	1.467	600
46	14	2.064	600
47	12	2.660	400
48	11	3.003	400
49	10	3.386	400
50	8	3.813	400
51	6	4.290	400
52	4	4.821	400
53	2	5.410	400
54	1	6.065	400

Tabelle5.3 Exacte und approximierte Werte von $\Pr(S \leq x)$

x	DP	DPA	K2	K3	CP1	CP2	N
25	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0061
50	0.0298	0.0298	0.0298	0.0298	0.0299	0.0296	0.0408
75	0.1690	0.1690	0.1691	0.1690	0.1694	0.1681	0.1641
100	0.4437	0.4437	0.4437	0.4437	0.4439	0.4419	0.4150
125	0.7262	0.7261	0.7262	0.7262	0.7260	0.7243	0.7083
150	0.9015	0.9014	0.9015	0.9015	0.9012	0.9003	0.9052
175	0.9736	0.9735	0.9736	0.9736	0.9734	0.9731	0.9810
200	0.9946	0.9945	0.9946	0.9946	0.9945	0.9945	0.9977
225	0.9991	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9991	0.9998
250	0.9999	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	1.0000

Tabelle 5.3 zeigt die exakten und approximierten Werten von $\Pr(S \leq x)$, welche durch bisherige Verfahren ermittelt

1. DP bezeichnet die exakte Werte , berechnet mittels De Pril's Rekursionsformel ;
2. DPA bezeichnet die Approximation basiert auf De Pril's Rekursionsformel gegeben bei Formel (5.7)(5.8) mit K=2 ;
3. K2 bezeichnet die Approximation bei Korny's Methode mit K=2 ;
4. K3 bezeichnet die Approximation bei Korny's Methode mit K=3 ;
5. CP1 bezeichnet die zusammengesetzte Poisson Approximation mit $\lambda_i = q_i$;
6. CP2 bezeichnet die zusammengesetzte Poisson Approximation mit $\lambda_i = -\log(1-q_i)$, wobei q_i die Sterbewahrscheinlichkeit des Versicherungsnehmers ;
7. N bezeichnet die Normale Approximation , wobei die Approximation normal verteilt mit Mittelwert 107,03 und Varianz 1073,16

Aus Tabelle 5.3 ist die Approximation in DPA,K2,K3 alle sehr gut , CP1,CP2 ist ok , N(normal Approximation) ist schlecht .

Bezüglich die erforderte Rechenzeit , alle Approximation kann fast sofort kalkuliert werden , da die exakt Rechnung noch langsamer ist .

Für die Approximation basiert auf De Pril's und Kornya's Methode , K ist klein , aber Fehler in jede Approximation ist auch klein .

De Pril's Methode mit $K = 2$ aus der Formel (5.9)

$$\delta(2) = 0,9934 \times 10^{-4}$$

Somit $\sum_{x=0}^{m^*} \left| g_x - g_x^{(K)} \right| \leq \exp\{\delta(K)\} - 1 = 0,9934 \times 10^{-4}$

Wobei $m^* = 39000$

Kornya's Methode mit $K = 2$ aus der Formel (5.14)

$$\sigma(2) = 0,000264$$

Somit $\sup_y \left| \sum_{x=0}^{y} g_x - \sum_{x=0}^{y} \left| g_x^{(K)} \right| \right| \leq 0,000264$

Tabelle5.4 Werte von h(i,k)

i	*h(i,1)*	*h(i,2)*	*h(i,3)*	*h(i,4)*
1	2.441	-0.0149	9.088×10^{-5}	-5.546×10^{-7}
6	10.34	-0.0446	1.919×10^{-4}	-8.270×10^{-7}
10	13.59	-0.0462	1.569×10^{-4}	-5.330×10^{-7}
14	17.37	-0.0359	7.432×10^{-5}	-1.537×10^{-7}

Eine Darstellung von dieses Argument in Paragraph 5.3 über die Wert von $h(i,k)$ ist fertigt , dass $h(i,k)$ kleine für grosser k .

Tabelle 5.4 zeigt $h(i,k)$ für $k = 1,2,3,4$

Für die zusammengesetzte Poisson Approximation aus (5.15) wissen wir , dass die Differenz zwischen Verteilungsfunktion und Approximation von CP1 im Intervall $(-0.0318, 0.0318)$ liegt , die Differenz von Approximation CP2 im Intervall $(0, 0.0319)$ liegt .

Aus Tabelle 5.3 wissen wir zwischen die exakten Werte und zusammengesetzte Poisson Approximation die Differenz gerade in diesem Intervall liegt . Die Konsequenz der Wahl von Poisson Parameter in Approximation CP2 ist , dass die Approximierende Verteilungsfunktion immer weniger Werte als die echte Verteilungsfunktion einnimmt .