Die klassische Ruintheorie

1. Einführung

In diesem Kapitel betrachten wir den klassischen Risiko-Prozess und leiten einige Ergebnisse für die Wahrscheinlichkeit des Ruins her. Insbesondere beweisen wir Lundberg's Ungleichung und zeigen, wie explizite Lösungen für die Wahrscheinlichkeit des Ruins gefunden werden können.

2. Der klassischer Risiko-Prozess

In dem klassischen Risiko-Prozess wird die Höhe des Überschusses eines Versicherers zu einem festgelegten Zeitpunkt t>0 durch drei Faktoren festgelegt:

1. Die Höhe des Startvermögens
2. Die Höhe der Prämieneinnahmen bis zum Zeitpunkt t.
3. Die Höhe der Schadenszahlungen bis zum Zeitpunkt t.

Der einzige zufällige Faktor von den drei genannten sind die Schadenzahlungen. So beschreiben wir zuerst den Gesamtschadenprozess , der mit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ bezeichnet wird.

Notation1:

Für ein fest t>0 , die Zufallvariable N(t) bezeichnet die Anzahl der Schäden, die in dem festgelegten Zeitintervall [0,t] eingetreten sind.

Notation2:

Die Gesamtschadenhöhe bis zum Zeitpunkt t wird mit S(t) bezeichnet: S(t)= $\sum_{i=1}^{N(t)} x_i$,

mit S(t)=0 falls N(t)=0. x_i bezeichnet die Höhe des i-ten Schadens, unabhängig und identisch verteilt für i>=1.

Definition:

Der Überschuss zum Zeitpunkt t wird mit U(t) bezeichnet und ist wie folgt definiert:

U(t)= u+ct-S(t)

u : die Höhe des Startvermögens.

c : die Höhe der Prämie pro Zeiteinheit.

In diesem Kapitel nehmen wir an:

1. Die Verteilungsfunktion von X_1 ist F mit F(0)=0
2. X_i >0 für $\forall i$
3. X ist stetig verteilt mit Dichte f
4. k-ter Moment von X_1 ist m_k
5. Die momenterzeugende Funktion von X_1 ist M_X. Falls sie existiert, dann gibt es ein γ mit $0<\gamma \le \infty$, so dass $M_X(r)<\infty$ für alle r<γ und $\lim_{r\to\gamma^-} M_X(r)=\infty$

Beispiel: $X_1 \sim \gamma(3,3)$,dann ist γ=3.

Bew:

Wegen $X_1 \sim \gamma$ (3,3)

$$\Rightarrow M_X(r)=(\frac{\lambda}{\lambda-r})^\alpha=(\frac{3}{3-r})^3=\frac{27}{(3-r)^3} \text{ für r<3 und } \lim_{r\to 3^-} M_X(r)=\infty$$

$\Rightarrow \gamma$=3.

Dieses Modell ist eine Vereinfachung der Realität, aber das ist ein nützliches Modell in Versicherungsbetrieb.

3 Poisson-Prozesse und zusammengesetzte Poisson-Prozesse

Definition: Ein Zählprozess ist ein Poisson-Prozess mit Parameter λ, wenn die Zwischeneintrittszeiten der Schäden exponential verteilt mit Erwartungswert $1/\lambda$ sind.

A_i: der Zeitraum zwischen dem (i-1)-ten und i-ten Schäden.

A_1:der Zeitraum bis zum Eintritt des ersten Schadens.

Dann ist $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Folge von unabhängigen exponential verteilten Zufallvariablen, jeweils mit Erwartungswert $1/\lambda$.

Satz:

Ist ein Zählprozess ein Poisson-Prozess mit Parameter λ, dann ist die Anzahl der Schäden zu einem festgelegten Zeitpunkt t Poisson verteilt mit Parameter λt .

Bew:

Sei N(t) die Anzahl der Schäden bis zum Zeitpunkt t.

$N(t) \geq n+1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} A_i \leq t$, n=0,1,2,....

Wegen A_1 , A_2 ..., A_{n+1} exponental verteilt mit Erwartungswert 1/ λ sind,

folgt: $\sum_{i=1}^{n+1} A_i \sim \gamma\left(n+1, \lambda\right)$

Und damit:

$$\Rightarrow p(N(t) \geq n+1) = p\left(\sum_{i=1}^{n+1} A_i \leq t\right) = 1 - \sum_{j=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \qquad \text{(nach 1.3.1)}$$

oder äquivalent:

$$p\left(N(t) \leq n\right) = \sum_{j=0}^{n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}$$

$\Rightarrow$ p(N(t)=n)= $e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ für n=0,1,2,....

Und daraus folgt die Behauptung.

Betrachten wir nun den Prozess $\left\{S\left(t\right)\right\}_{t \geq 0}$,S(t) ist ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Poisson Parameter λ .

Bemerkung:

Eine wichtige Eigenschaft von dem zusammengesetzten Poisson-Prozess ist, dass er stationäre und unabhängige Zuwächse besitzt.

Definition:

Ein stochastischer Prozess $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ besitzt stationäre Zuwächse, wenn für 0<s<t, die Verteilung von Y(t)-Y(s) nur von t-s ab hängt, nicht von den Werten von t und s.

Definition:

Ein stochastischer Prozess $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ besitzt unabhängige Zuwächse, wenn für $0<s<t\leq u<v$, Y(t)-Y(s) ist unabhängig von Y(v)-Y(u).

Bemerkung:

In dem Sinn von Wahrscheinlichkeit kann ein Prozess mit stationären und unabhängigen Zuwächsen in jedem Zeitpunkt als“ Erneuerung“ betrachtet werden.

„ Erneuerung“ gilt für einen zusammengesetzten Poisson-Prozess, weil die Exponentialverteilung die Eigenschaft der „Gedächtnislosigkeit“ besitzt.

Satz: Die Exponentialverteilung ist „gedächtnislos“.

Bew: sei τ der Zeitpunkt kurz vor t, wo Schaden eingetreten ist. $\tau=0$ falls kein Schaden vor dem Zeitpunkt t eingetreten ist .

A_τ :der Zeitraum von τ bis zum Zeitpunkt, wo der nächste Schaden eintritt.

A_t :der Zeitraum von t bis zum Zeitpunkt, wo der nächste Schaden eintritt.

$A_\tau \sim \exp(\lambda)$

$$P(A_t>s)=P(A_\tau>t-\tau+s \mid A_\tau>t-\tau)$$

$$=\frac{P(A_\tau>t-\tau+s)}{P(A_\tau>t-\tau)}$$

$$=\frac{\exp\{-\lambda(t-\tau+s)\}}{\exp\{-\lambda(t-\tau)\}}$$

$$=\exp\{-\lambda s\}$$

4 Definition der Ruinwahrscheinlichkeit

Zuerst betrachten wir $t\in(0,\infty]$

Definition:

In stetiger Zeit wird die Wahrscheinlichkeit des Ruins wie folgt definiert:

$\psi(u)$=P(U(t)<0 für ein t>0).

wobei U(t) der Überschuss ist, d.h. $\psi(u)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Überschussprozess unter Null zu einem bestimmten Zeitpunkt t fallen wird.

Definition:
In diskreter zeit ist die Wahrscheinlichkeit des Ruins wie folgt definiert:

$\psi_r(u)$=P(U(t)<0 für ein t=r,2r,3r,...)

d.h.Ruin tritt nur auf,wenn der Versicherersüberschuss unter Null in einem der Zeitpunkte r,2r,3r,...fallen wird.

Satz: $\psi_r(u) < \psi(u)$

Bew:
Sei U(nr)>0,U((n+1)r)>0 mit U(τ)<0 für ein $\tau \in$ (nr,(n+1)r) und U(t)>0 für alle t $\notin$ (nr,(n+1)r)
Dann gilt in diskreter Zeit U(τ)>0, aber in stetiger Zeit ist U(τ)<0

Nach dem Definition folgt: $\psi_r(u) < \psi(u)$.

Bemerkung:

Wenn r hinreichend klein ist, stellt $\psi_r(u)$ eine gute Approximation für $\psi(u)$ dar.

Dann betrachen wir t $\in (0, \infty)$

Definition :
In stetiger Zeit ist die Wahrscheinlichkeit des Ruins wie folgt definiert:

ψ (u,t)=P(U(s)<0 für ein s,0<s $\leq$ t)

d.h. ψ (u,t) ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Überschussprozess unter Null im

Intervall $(0,t]$ fallen wird.

Definition:
In diskreter Zeit ist die Wahrscheinlichkeit der Ruins wie folgt definiert:

$\psi_r(u,t)$=P(U(s)<0 für ein s,s=r,2r,3r,...t)wobei t =kr , k $\in$ N

Satz: $\psi_r(u,t) < \psi(u,t)$

Bew:analog.
Bemerkung:

Wenn r hinreichend klein ist, stellt $\psi_r(u,t)$ eine gute Approximation für

$\psi(u,t)$ dar.

5 Der Anpassungskoeffizient

Der Anpassungskoeffizient R ist ein Mass für das Risiko in dem Überschussprozess.

R hängt von zwei Faktoren ab:

1.von der Gesamtschadenhöhe

2. von der Höhe der Prämien

Annahme: c=(1+θ) λm_1 .

Satz:

In dem klassischen Risikoprozess ist der Anpassungskoeffizient die eindeutige positive Lösung der Gleichung $\lambda M_X(r) - \lambda - cr = 0$. (1)

Dann bekommen wir R von $\lambda + cR = \lambda M_X(R)$ (2)

Bemerkung:

R ist unabhängig vom Poisson Parameter λ ,wenn c=(1+θ) λm_1 .

Bew des Satzes:

Indem man das Schaubild der Funktion g(r)=$\lambda M_X(r) - \lambda - cr$ untersucht, sieht man dass R durch (1) eindeutig bestimmt ist.Also betrachte zuerst g(r) mit g(0)=0.

Ableitung von g(r) nach r : $\frac{d}{dr} g(r) = \lambda \frac{d}{dr} M_X(r) - c$

$$= \lambda \frac{d}{dr} \int_0^\infty (e^{rx} f(x) dx) - c$$

$$= \lambda \int_0^\infty (\frac{d}{dr} e^{rx} f(x)) dx - c$$

$$= \lambda \int_0^\infty (x e^{rx} f(x)) dx - c \qquad \underrightarrow{r = 0}$$

$$= \lambda \int_0^\infty x f(x) dx - c$$

$$= \lambda E(x) - c$$

$$= \lambda m_1 - c < 0$$

$\Rightarrow$ g ist fallend um r=0.

Noch mal Ableitung : $\frac{d^2}{dr^2} g(r) = \lambda \frac{d^2}{dr^2} M_X(r) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{rx} f(x) dx > 0$

$\Rightarrow$ g besitzt ein Minimum.

Beh: $\lim_{r \to \gamma^-} g(r) = \infty$

Bew:1.Fall: $\gamma < \infty$ klar.

2.Fall: $\gamma = \infty$

wegen x_i >0 für alle i, existiert ein ε >0 und p mit P($X_1 > \varepsilon$)=p>0

s.d. $M_X(r) = \int_0^\infty e^{rx} f(x) dx$

$$\geq \int_\varepsilon^\infty e^{rx} f(x) dx$$

$$\geq e^{r\varepsilon} \int_\varepsilon^\infty f(x) dx$$

$$\geq e^{r\varepsilon} p$$

$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} g(r) \geq \lim_{r\to\infty} (\lambda e^{r\varepsilon} p - \lambda - cr) = \infty$.

Gerade haben wir gezeigt,dass g(r) um Null fällt und ein Minimum besitzt. Dann können wir jetzt ein Bild malen:

Beispiel :F(x)=1-exp{- α x} x $\geq$ 0, dann R= $\alpha - \lambda / c$

Bew: $M_X(r) = \frac{\alpha}{\alpha - r}$

$$\Rightarrow \lambda + cR = \frac{\lambda\alpha}{(\alpha - R)}$$

$$\Rightarrow R^2 - (\alpha - \lambda / c) R = 0$$

$$\Rightarrow R = \alpha - \lambda / c$$

Beispiel: $X_1 \sim \gamma$ (2,2) , θ =10% ,R=?

Sei $M_X(r) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - r}\right)^\alpha = (\frac{2}{2-r})^2 = \frac{4}{(2-r)^2}$ für r<2

$\Rightarrow$ 1+1.1R=4/(2-R)²

$\Rightarrow$ 1.1R³-3.4R²+0.4R=0

$\Rightarrow$ R=0,R=0.01225,R=2.968

Da der Anpassungskoeffizient positiv sein muss und $M_X(r)$ existiert für r<2

Also ist R=0.1225.

In den zwei oben gegebenen Beispielen können wir genaue Lösungen für den Anpassungskoeffizient berechnen. Aber in anderen Fällen müssen wir die Gleichung (1) mit numerischen Methoden lösen.

Beispiel: $X_1 \sim \gamma$ (2.5,2.5).

Der Anpassungskoeffizient R ist die eindeutige positive Lösung der Gleichung $\lambda(\frac{2.5}{2.5-r})^{2.5} - cr - \lambda = 0$ .Wenn wir die Werte c und λ einsetzen, können wir leicht durch eine mathematische Software Packet R finden.Wir können auch eine obere Grenze für den Anpassungskoeffizient finden , wie folgt:

Nach der Taylorentwicklung gilt: $e^{Rx} \geq 1 + Rx + \frac{1}{2}(Rx)^2$ für $x \geq 0$

nach (2): $\lambda + cR = \lambda M_X(R) = \lambda\int_0^\infty e^{Rx} f(x)dx$

$$\geq \lambda\int_0^\infty (1 + Rx + \frac{1}{2}(Rx)^2) f(x)dx$$

$$\geq \lambda\left(\int_0^\infty f(x)dx + R\int_0^\infty xf(x)dx + \frac{1}{2}R^2\int_0^\infty x^2 f(x)dx\right)$$

$$\geq \lambda(1 + Rm_1 + \frac{1}{2}R^2 m_2)$$

$$\Rightarrow R \leq \frac{2(c - \lambda m_1)}{\lambda m_2}$$

Beispiel: $X_1 \sim \gamma$ (2.5,2.5), θ =5%,gesucht ist die obere Grenze von R.Benutzen Sie bitte eine numerische Methode,um die Werte R bis vier Dezimalstellen zu berechnen.

Wegen X~ γ (2.5,2.5)

$\Rightarrow$ E(x)= $\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{2.5}{2.5}$ =1= m_1

E(x²)= $\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} = \frac{2.5(2.5+1)}{2.5^2} = \frac{7}{5} = m_2$

$\Rightarrow$ R $\leq \frac{2(1.05\lambda - \lambda)}{7\lambda/5}$ = $\frac{1}{14}$ =0.0714.

Wir benutzen Newton-Verfahren um r_n zu berechnen mit $r_0 = 0.0714$,

$$r_{n+1} = r_n - \frac{g(r_n)}{g'(r_n)}, \text{ wegen}$$

$$g(r) = \lambda M_X(r) - \lambda - cr$$

$$= \lambda \left(\frac{\lambda}{\lambda - r} \right)^{\alpha} - \lambda - (1+\theta)\lambda m_1 r$$

$$= \lambda \left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - r} \right)^{\alpha} - 1 - (1+\theta) m_1 r \right]$$

$$=2.5 \left[\left(\frac{2.5}{2.5 - r} \right)^{2.5} - 1 - (1+0.05) r \right]$$

$$= \frac{5}{2} \left[\left(\frac{5}{(5-2r)} \right)^{\frac{5}{2}} - 1.05r - 1 \right]$$

$$g'(r) = \frac{5}{2} \left[(\frac{5}{5-2r})^{7/2} - 1.05 \right]$$

Also berechnen wir r_n durch Newton-Verfahren. Dann bekommen wir die Tabelle :

n	r_n
1	0.06862
2	0.06850
3	0.06850
4	0.06850

so dass R=0.0685.Diese obere Grenze ist hier eine vernünftige Annäherung für R.

6 Lundbergs Ungleichung

Für den Risiko-Prozess haben wir Lundbergs Ungleichung schon bewiesen und jetzt betrachten wir diese Ungleichung in dem klassischen Risiko-Prozess.

Satz: $\psi(u) \le \exp\{-Ru\}$, wobei R der Anpassungskoeffizient ist.

Bew: durch Induktion.

Wir def. $\psi_n(u)$ die Wahrscheinlichkeit des Ruin vor oder im n-ten Schaden.

weil $\psi(u)=\lim\limits_{n\to\infty}\ \psi_n(u)$ ist,genügt es zu zeigen dass $\psi_n(u)\le$ exp{-Ru} für n=1,2,3,....

IA: n=1 $\Rightarrow$ x>u+ct gilt:

$$\psi_1(u)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_{u+ct}^\infty f(x)\text{dxdt}$$

Wegen $\exp\{-R(u+ct-x)\}\ge 1$ für $x\ge u+ct$, gilt:

$$\int_{u+ct}^{\infty} f(x)dx \le \int_{u+ct}^{\infty} e^{-R(u+ct-x)} f(x)\,dx \tag{3}$$

also $\psi_1(u)\le\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_{u+ct}^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt$

$$\le\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt$$

$$\le e^{-Ru}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t}\int_0^\infty f(x)e^{Rx}dxdt$$

$$\le e^{-Ru}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t}M_X(R)\,dt$$

da $\lambda+cR=\lambda M_X(R), gilt\ \psi_1(u)\le e^{-Ru}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t}(\lambda+cR)dt \le -e^{-Ru}e^{-(\lambda+cR)t}\Big|_0^\infty \le e^{-Ru}$

IS:n $\Rightarrow$ n+1

Annahme: $\psi_n(u)\le\exp\{-Ru\}$ zzg: $\psi_{n+1}(u)\le$ exp{-Ru}

Bew:Falls Ruin vor oder im (n+1)-ten Schaden eintritt, dann entweder

(1) Ruin tritt beim ersten Schaden ein, d.h x>u+ct, oder

(2)Ruin tritt nicht beim ersten Schaden ein, s.d. der Überschuss nach der ersten Schadenzahlung beträgt u+ct-x$\ge$0 und Ruin tritt bei diesem Überschuss bei einem der nächsten n Schäden ein.

Dann gilt $\psi_{n+1}(u)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt+\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct} f(x)\psi_n(u+ct-x)dxdt$,

wobei $\psi_n(u+ct-x)$ bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dass der Ruin bei dem Überschuss u+ct-x innerhalb der nächsten n Schäden eintritt.

Nach dem Lundberg's Uungleichung gilt: $\psi_n\left(u+ct-x\right)\le e^{-R\left(u+ct-x\right)}$

$$\Rightarrow \psi_{n+1}(u)\le \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt+\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct} f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt$$

$$\underrightarrow{nach(3)}\quad \le \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)}f(x)dxdt+\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct} f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt$$

$$\le \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt$$

$$\le e^{-Ru}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t}\int_0^\infty f(x)e^{Rx}dxdt$$

$$\le e^{-Ru}\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t}M_X\left(R\right)dt$$

$$\le e^{-Ru}$$

Und daraus folgt die Behauptung.

7. Überlebenswahrscheinlichkeit

Defition:

$\phi\left(u\right)$:=1-$\psi\left(u\right)$ ist die Wahrscheinlichkeit,dass kein Ruin beim Startkapital u eintritt.

Nach dem Beweis der Lundbergs Ungleichung bekommen wir die Gleichung:

$$\phi\left(u\right)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct} f(x)\phi\left(u+ct-x\right)dxdt$$

durch Substitution s=u+ct erhält man:

$$\phi\left(u\right)=\frac{1}{c}\int_u^\infty \lambda e^{-\lambda(s-u)/c}\int_0^s f(x)\phi\left(s-x\right)dxds$$

$$=\frac{\lambda}{c}e^{\lambda u/c}\int_u^\infty \lambda e^{-\lambda s/c}\int_0^s f(x)\phi\left(s-x\right)dxds \qquad (4)$$

Differenziert man die Gleichung bekommen wir:

$$\frac{d}{du}\phi\left(u\right)=\left(\frac{\lambda^2}{c^2}e^{\lambda u/c}\int_u^\infty e^{-\lambda s/c}\int_0^s f\left(x\right)\phi\left(s-x\right)dxds+\frac{\lambda}{c}e^{\lambda u/c}\left(0-e^{-\lambda u/c}\right)\int_0^u f(x)\phi\left(u-x\right)dx\right)$$

$$= \frac{\lambda^2}{c^2} e^{\lambda u/c} \int_u^\infty e^{-\lambda s/c} \int_0^s f(x)\phi(s-x)\,dx\,ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)\,dx$$

$$= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)\,dx \qquad (5)$$

(die sogenannente Intergro-Differentialgleichung)

Annahme F(x)=1-$e^{-\alpha x}$ $x \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{du}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\phi(u-x)\,dx$$

$$= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\alpha\lambda}{c}\int_0^u e^{-\alpha(u-x)}\phi(x)\,dx$$

$$= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\alpha\lambda}{c} e^{-\alpha u}\int_0^u e^{\alpha x}\phi(x)\,dx \qquad (6)$$

nochmal Ableitung gilt:

$$\frac{d^2}{du^2}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\frac{d}{du}\phi(u) + \frac{\alpha^2\lambda}{c} e^{-\alpha u}\int_0^u e^{\alpha x}\phi(x)\,dx - \frac{\alpha\lambda}{c}\phi(u) \qquad (7)$$

Betrachten wir die Gleichung (6) und (7), dann können wir sehen, dass das Integral in Gleichung (7) ist einfach das Integral in Gleichung (6) multipliziert mit (-α).Daher multiplizieren wir die Gleichung (6) mit α und addieren die daraus resultierende Gleichung mit (7)

$$\Rightarrow \frac{d^2}{du^2}\phi(u) + \alpha\frac{d}{du}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\frac{d}{du}\phi(u)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{du^2}\phi(u) + \left(\alpha - \frac{\lambda}{c}\right)\frac{d}{du}\phi(u) = 0$$

Die allgemeine Lösung ist: $\phi(u) = a_0 + a_1 e^{\left(\frac{\lambda}{c}-\alpha\right)u}$,wobei $a_{0,} a_1$ konstant sind.

Nach Lundbergs Ungleichung gilt: $\lim_{u\to\infty}\psi(u) = 0 \Rightarrow \lim_{u\to\infty}\phi(u) = 1$

$\Rightarrow a_0 = 1$ und $\phi(0) = 1 + a_1 \Rightarrow a_1 = -\psi(0)$

$\Rightarrow \phi(u) = 1 - \psi(0) e^{\left(\frac{\lambda}{c}-\alpha\right)u}$

setzen $\phi = 1 - \psi$ in (5) ein,gilt:

$$\frac{d}{du}\left(1-\psi(u)\right)=\frac{\lambda}{c}\left(1-\psi(u)\right)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\left(1-\psi(u-x)\right)dx$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{du}\psi(u)=\frac{\lambda}{c}-\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)dx+\frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\psi(u-x)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{du}\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\psi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\psi(u-x)\,dx-\frac{\lambda}{c}(1-F(u))$$

integrieren über $(0,\infty)$

$$\Rightarrow -\psi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(u)du-\frac{\lambda}{c}\underbrace{\int_0^\infty\int_0^u f(x)\psi(u-x)\,dxdu}-\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\left(1-F(u)\right)du$$

$$=\int_0^\infty[\int_x^\infty \psi(u-x)du]f(x)\,dx \qquad \text{sub } y:=u-x$$

$$=\int_0^\infty[\int_0^\infty \psi(y)dy]f(x)\,dx$$

$$=\int_0^\infty \psi(y)dy$$

$$\Rightarrow \psi(0)=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\left(1-F(u)\right)du=\frac{\lambda}{c\alpha}$$

$$\Rightarrow \phi(u)=1-\frac{\lambda}{\alpha c}\exp\left\{\left(\frac{\lambda}{c}-\alpha\right)u\right\}$$

Diese Methode kann auch für andere Verteilungsfunktion benutzen.

Setzen c=$(1+\theta)\lambda m_1$

$$\Rightarrow \phi(u)=1-\frac{1}{1+\theta}\exp\left\{(-\alpha\theta/(1+\theta))u\right\}$$ ist unabhängig von λ.

Bemerkung:
Die Unabhängigkeit gilt für jede Verteilung der Einzelschadenhöhe,ist nicht nur für die Exponentialverteilung.
Um zu sehen, warum dies der Fall ist, betrachten wir die beiden folgenden Risiken

Risiko1:Der Gesamtschadenprozess ist ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Poisson Parameter 120 und Einzelschadenhöhen sind exponentialverteilt mit EW=1.Die Prämieneinnahme pro Zeiteinheit ist 132.

Risiko2:Der Gesamtschadenprozess ist ein zusammengesetzter Poisson-Prozess mit Poisson Parameter 10 und Einzelschadenhöhe sind exponentialverteilt mit

EW=1.Die Prämieneinnahme pro Zeiteinheit ist 11.

Wenn die Zeiteinheit in Risiko 2 ein Monat ist und die Zeiteinheit in Risiko 1 ein Jahr ist, dann sind die beide Risiken identisch. Aber wenn die Zeiteinheit in Risiko 2 ein Jahr wäre, dann gäbe es einen Unterschied. Das wird im nächsten Kapitel betrachtet.