Seminar Versicherungsrisiko und Ruin
Prof. Dr. H. Schmidli
23.06 Ying Zhou

Klassische Ruintheorie

7.8 Die Laplace Transformation der Überlebenswahrschein lichkeit

In diesem Abschnitt sehen wir, wie ϕ durch die Laplace Transformation bestimmt ist.

Def: Sei h(y) eine Funktion für alle $y \geq 0$. Die **Laplace Transformation** ist definiert als

$$h^*(s) = \int_0^\infty e^{-sy} h(y)dy$$

Eigentschaft von Laplace Transformation:

(1) Seien h_1, h_2 zwei Funktionen, deren Laplace Transformationen existieren, und seinen α_1 und α_2 zwei Konstanten. Dann gilt:

$$\int_0^\infty e^{-sy}(\alpha_1 h_1(y) + \alpha_2 h_2(y))dy = \alpha_1 h^*{}_1(s) + \alpha_2 h^*{}_2(s)$$

(2) Laplace Transformation eines Integrals: Sei h eine Funktion ,deren Laplace Transformation existiert und sei H(x)= $\int_0^x h(y)dy$. Dann gilt: $H^*(s) = h^*(s)/s$

(3) Laplace Transformation einer Ableitung: Sei h eine differentierbare Funktion, deren Laplace Transformation existiert. Dann gilt:

$$\int_0^\infty e^{-sy}(\frac{d}{dy}h(y))dy = sh^*(s) - h(0)$$

(4) Laplace Transformation einer Faltung : Seien h_1, h_2 wie oben, definiere,

$$h(x) = \int_0^x h_1(y)h_2(x-y)dy \text{ . Dann gilt: } h^*(s) = h_1^*(s)h_2^*(s)$$

(5) Laplace Transformation einer ZV : sei X$\sqcup$ H, wobei H(0)=0. Dann gilt:

$$E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sy} dH(y) .$$

Falls die Verteilung stetig ist und mit Dichte h, gilt es :

E[e^{-sX}] = $h^*(s)$

Wir können die Eigenschaft der Laplace Transformation benutzen um ϕ wie folgend zu bestimmen:

Aus (7.6) haben wir $\frac{d}{du}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)dx$

$$\overset{Eig.3}{\Rightarrow} \quad s\phi^*(s) - \phi(0) = \int_0^\infty e^{-su}\left(\frac{\lambda}{c}\phi(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)dx\right)du$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-su}\phi(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-su}\int_0^u f(x)\phi(u-x)dx)du$$

$$= \frac{\lambda}{c}\phi^*(s) - \frac{\lambda}{c} f^*(s)\phi^*(s)$$

$$\Leftrightarrow cs\phi^*(s) - c\phi(0) = \lambda\phi^*(s) - \lambda f^*(s)\phi^*(s)$$

$$\Leftrightarrow \phi^*(s) = \frac{c\phi(0)}{cs - \lambda(1 - f^*(s))} \qquad (7.12)$$

Falls f^* eine rationale Funktion ist, können wir ϕ bestimmen durch Invertieren von ϕ^*

7.9 Rekursive Berechung

In diesem Abschnitt beschreiben wir zwei rekursive Methoden, die zur Grenze und Approximation der Ruin/Überlebenswahrscheinlichkeit führen.

7.9.1 Die Verteilung des maximalen Gesamtverlusts

Um die rekursive Formel (4.22) zu benutzen müssen wir zuerst zeigen dass Φ die Verteilungsfunktion von einer zusammengesetzten geometrischen ZV ist.

Def. & Bez.: **Der Gesamtverlust Prozess** $\{L(t)\}$ ist definiert als $L(t) = S(t) - ct \quad \forall \quad t > 0$.

s.d. $U(t) = u - L(t)$

L: der maximale Gesamtverlustprozess

Bem 1: Φ ist VF von L.

Beweis. Wir wissen $\Psi(u) = P[U(t) < 0]$

$$\Rightarrow \Phi(u) = P[U(t) \geq 0 \quad \forall \quad t > 0]$$

$$= P[L(t) \leq u \quad \forall \quad t > 0]$$

$$= P[L \leq u] \qquad \square$$

wir wissen $L(0) = 0$, L ist eine nicht negative ZV => $\Phi(0) = P[L = 0]$.

Bem 2: $\Psi(0) = \dfrac{\lambda m_1}{c}$

Beweis. Wir wissen $L \sim \Phi(u)$, $\Phi(0) = P[L = 0]$

nach Eigenschaft 5 der Laplace-Transformation

$$L^*(s) = E[e^{-sL}] = \int_0^\infty e^{-su} d\Phi(u)$$

$$X_i = \Phi(0) + \int_0^\infty \left(e^{-su} \frac{d}{du} \Phi(u) \right) du$$

$$= \Phi(0) + s\Phi^*(s) - \Phi(0)$$

$$= s\Phi^*(s)$$

$$\overset{(7.12)}{=} \frac{cs\Phi(0)}{cs - \lambda\left(1 - f^*(s)\right)} \qquad (7.16)$$

$$L^*\left(s\right)|_{s=0} = E\left[e^{-sL}\right]|_{s=0} = E\left[1\right] = 1 \quad (*).$$

Und durch l´Hopital haben wir aus (7.16)

$$L^*(s)\,|_{s=0} = \frac{c\Phi(0)}{c + \lambda\left(\frac{d}{ds}\right) f^*(s)\,|_{s=0}}$$

NR:

$$f^*(s) \overset{Def}{=} \int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f^*(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-sy} f(y)dy = -\int_0^\infty ye^{-sy} f(y)dy$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds} f^*(s)\,|_{s=0} = -\int_0^\infty ye^{-sy} f(y)dy\,|_{s=0} = -\int_0^\infty yf(y)dy = -m_1$$

$$L^*(s)\,|_{s=0} = \frac{c\Phi(0)}{c - \lambda m_1}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} 1 = \frac{c\Phi(0)}{c - \lambda m_1}$$

$$\Rightarrow \Phi(0) = 1 - \frac{\lambda m_1}{c} \Rightarrow \Psi(0) = \frac{\lambda m_1}{c} \qquad \square$$

Bem 3: L ist zusammengesetze geometrische ZV.
Beweis.
wir wissen S(t) ist ein zusammengesetzeter Poisson.-Prozess, und besitzt unabhängige und stationäre Zuwächse.
$\Rightarrow$ L(t)=S(t)-ct besitzt auch unabhängigen und stationären Zuwächse.

Definiere L_i: Betrag vom i-ten Zuwachs (zu dem neuen Niveau des Gesamtschadens)

Wir wissen der maximale Gesamtverlust ist größer als Null, wenn der Überschuss unter dem Anfangskapital fällt, und mit der Wahrscheinlichkeit $\Psi(0)$.

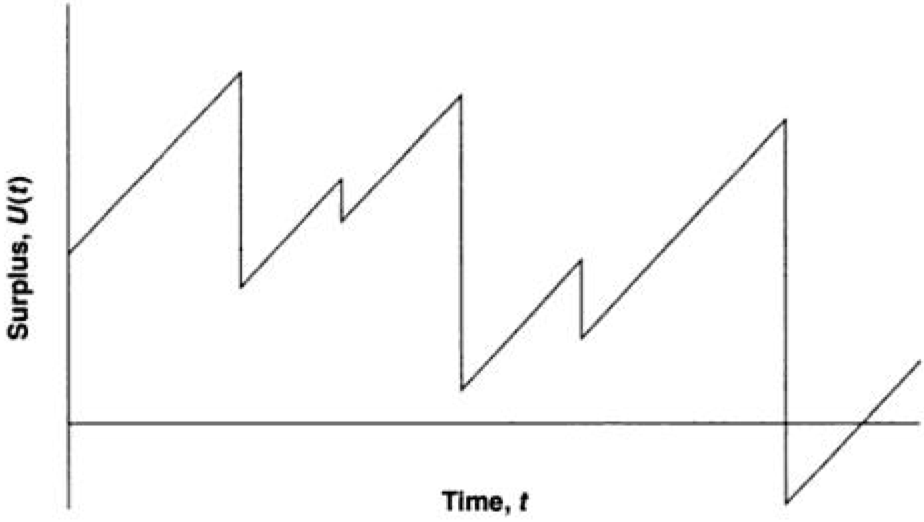
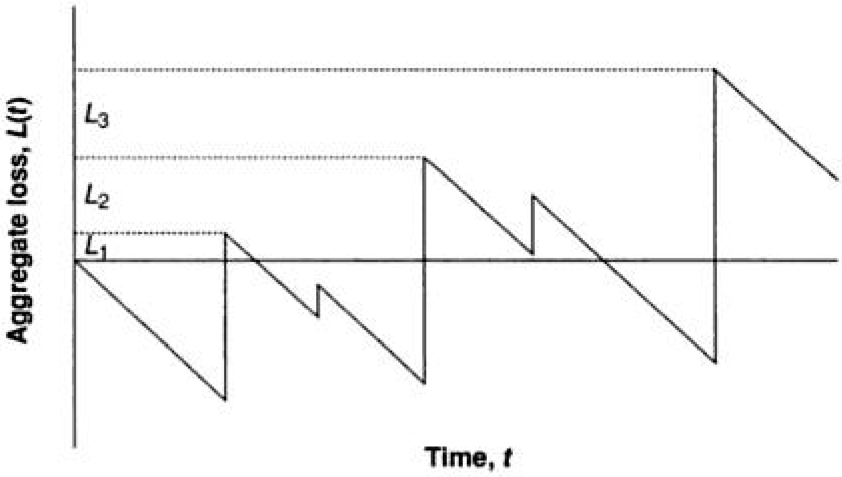


Figure 7.3 A realisation of a surplus process.



$\Rightarrow$ P(N=n) = P($L_1 > 0$, $L_2 > 0$,...... $L_n > 0$, $L_t = 0$ für t>n)

= P($L_1 > 0$)P($L_2 > 0$)......P($L_n > 0$)P($L_t = 0$ für t>0)

= $\Psi(0)^n \Phi(0)$

d.h N hat eine geometrische Verteilung

wir wissen dass L_i unabhängig und identisch und unabhägig von N ist.

$\Rightarrow$ L ist zusammengesetzt geometrisch verteilt. □

Jetzt betrachten wir die Verteilung von L_1 .

Setze $K(x) = P[L_1 \le x]$ k: die zugehörige Dichte $k^* = E[\exp\{-sL_1\}]$

Bem. $k(x) = \frac{1}{m_1}\left(1 - F(x)\right)$

Beweis: Wir wissen $E[e^{-sL}] \overset{4.22}{=} E[E(e^{-sL} \mid N)]$

$$= E[k^*(s)^N]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} k^*(s)^n \cdot P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} k^*(s)^n \cdot (\Psi(0))^n \Phi(0)$$

$$= \Phi(0) \sum_{n=0}^{\infty} (k^*(s) \cdot \Psi(0))^n$$

$$\underset{\text{Reihe}}{\overset{geom.}{=}} \frac{\Phi(0)}{1 - k^*(s)\Psi(0)} \qquad (7.18)$$

aus (7.16) haben wir $E[e^{-sL}] = \frac{cs\Phi(0)}{cs - \lambda\left(1 - f^*(s)\right)}$

$$=> \frac{cs\Phi(0)}{cs - \lambda\left(1 - f^*(s)\right)} = \frac{\Phi(0)}{1 - \Psi(0)k^*(s)}$$

$$\overset{\Psi(0) = \frac{\lambda m_1}{c}}{=>} \; k^*(s) = \frac{1}{m_1 s}\left(1 - f^*(s)\right)$$

$$=> \; k(x) = \frac{1}{m_1}\left(1 - F(x)\right)$$

die Verteilung von L_1 ist stetig, d.h. falls wir (4.22) benutzen um Φ zu approximieren, müssen wir zuerst diese Verteilung diskretisieren.

Nach Abschnitt 4.7.1 machen wir folgendes:

Definiere $L_\alpha = \sum_{i=1}^{N} L_{\alpha,i}$, N : zusammengesetzt geometrisch verteilt, $\{L_{\alpha,i}\}_{i=1}^{\infty}$ iid.

$L_{\alpha,i}$ hat die Verteilungsfunktion (entsprechend der diskretisierten Verteilung) K_α und die Wahrscheinlichkeitsfunktion $k_{\alpha,x} = K(x+1) - K(x)$ für x=0,1,2...

⇨ für $x \geq 0$: $K_\alpha(x) \geq K(x)$, d.h. K_α ist eine obere schranke von K.

Analog können wir eine diskretisierte Verteilung K_β erstellen, die untere Schranke von K ist.

Definiere $L_\beta = \sum_{i=1}^{N} L_{\beta,i}$, N wie oben, $\{L_{\beta,i}\}_{i=1}^{\infty}$ iid mit VF K_β und Wahrscheinlichkeitsfunktion

$k_{\beta,x} = K(x) - K(x-1)$ für x=1,2,3...

- ⇨ für $x \geq 1$: $K_\beta(x) \leq K(x)$
- ⇨ $K_\alpha(u) \geq K(\alpha) \geq K_\beta(u)$ für $u \geq 0$ $\overset{(5.17)}{=>}$ $K_\alpha^*(u) = K^*(u) = K_\beta(u)$

$$\Phi(u) = P[L \leq u] = P[L = 0] + P[0 < L \leq u]$$

$$= \Phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} P[L \leq u \text{ und N =n}]$$

$$= \Phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} P[L \leq u \mid N = n] \cdot P[N = n]$$

$$= \Phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(0)^n \Phi(0) K^{n^*}(u) \qquad (7.19)$$

=> $P[L_\alpha \leq u] \geq P[L \leq u] \geq P[L_\beta \leq u]$ (7.20)

und $P[L_\alpha < u] \geq P[L < u] \geq P[L_\beta < u]$

- ⇨ für $u > 0$: $P[L_\alpha < u] < P[L_\alpha \leq u]$ und $P[L_\beta < u] < P[L_\beta \leq u]$ da L_α , L_β diskret sind.
- ⇨ Wir finden die Grenze von Φ: $P[L_\beta \leq u] \leq \Phi(u) \leq P[L_\alpha < u]$.

$L_{\alpha,1}$ und $L_{\beta,1}$ sind diskrete ZV, $\Phi_\alpha(u) = P[L_\alpha \leq u]$, $\Phi_\beta(u) = P[L_\beta \leq u]$

nach 4.22 => $\Phi_\alpha(0) = \dfrac{\Phi(0)}{1 - \Psi(0) k_{\alpha,0}}$

für u=1,2,3,... $\Phi_\alpha(u) = \dfrac{1}{1 - \Psi(0) k_{\alpha,0}} \left(\Phi(0) + \Psi(0) \sum_{j=1}^{u} k_{\alpha,j} \Phi_\alpha(u-j) \right)$

und $\Phi_\beta(0) = \Phi(0)$

für u=1,2,3,... $\Phi_\beta(0) = \Phi(0) + \Psi(0) \sum_{j=1}^{u} k_{\beta,j} \Phi_\beta(u-j)$

7.9.2 Rekursive Berechnung in einem diskreten Zeitmodell

In diesem Abschnitt wird erklärt wie die Ruinwahrscheinlichkeit in unendlicher Zeit und in endlicher Zeit von einem diskreten Zeit-Risikomodell approximiert wird.

Def.: Im klassischen Risikomodell definieren wir die Ruinwahrscheinlichkeit in endlicher Zeit als

$$\Psi(u,t) = P[u + cs - \sum_{i=1}^{N(s)} x_i < 0 \quad \text{für s mit} \quad 0 < s \leq t]$$

wobei N(s) ~Poisson (λs)

setze $c = (1+\theta)\lambda m_1$, $\lambda = m_1 = 1$

Die Approximation wird in 3 Schritten konstruiert

1. Schritt: Diskretisieren.

Für i=1,2,3,... ersetze x_i durch $x_{1,i}$, wobei $x_{1,i}$ diskrete ZV verteilt auf $0, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \ldots,$

für $\beta > 0$. Die Verteilung von $X_{1,i}$ soll so gewählt dass sie eine gute Approximation zu der Verteilung von X_i ist.

Definiere $${}_1\Psi(u,t) = P[u + \overbrace{(1+\theta)}^{c} s - \sum_{i=1}^{N(s)} x_{1,i} < 0 \quad \text{für ein s, mit} \quad 0 < s \leq t]$$

Dann ist ${}_1\Psi(u,t)$ eine gute Approximation zu $\Psi(u,t)$

2. Schritt: Die monetäre Einheit ändern.

Für i=1,2,3... definiere $X_{2,i} = \beta X_{1,i}$

definiere $${}_2\Psi(w,t) = P[w + (1+\theta)\beta s - \sum_{i=1}^{N(s)} X_{2,i} < 0 \quad \text{für s, mit} \quad 0 < s \leq t]$$

Beh.: ${}_2\Psi(\beta u,t) = {}_1\Psi(u,t)$

Beweis: $${}_2\Psi(\beta u,t) = P[\beta u + (1+\theta)\beta s - \sum_{i=1}^{N(s)} \beta X_{1,i} < 0\ ]$$

$$= P\left[\underbrace{\beta}_{>0}\left(u + (1+\theta)s - \sum_{i=1}^{N(s)} \beta X_{1,i}\right) < 0\right]$$

$$= P\left[u + (1+\theta)s - \sum_{i=1}^{N(s)} X_{1,i} < 0 \right]$$

$$= {}_1\Psi(u,t)$$

3. Schritt: Zeiteinheit ändern.

Setze $\lambda = \dfrac{1}{(1+\theta)\beta}$, d.h. das Prämieneinkommen pro Zeiteinheit ist 1.

Def. ${}_3\Psi(w,t) = P[w + s - \sum_{i=1}^{N^*(s)} \beta x_{2,i} < 0$ für s, mit $0 < s < t]$ (7.22)

Wobei $N^*(s)$ hat Poisson Verteilung mit $m_1 = \dfrac{s}{(1+\theta)\beta}$

=> ${}_3\Psi(w,(1+\theta)\beta t) = {}_2\Psi(w,t)$

=> $\Psi(u,t) \approx {}_3\Psi(u\beta,(1+\theta)\beta t)$

d.h. ${}_3\Psi(u,t)$ gibt die Ruinwahrscheinlichkeit in stetiger Zeit.

Wir können ${}_3\Psi(u,t)$ approximieren durch $\Psi_d(u,t) = P[u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i \le 0$ für ein n mit n=1,2,3,...t]

Wobei Zi hat eine zusammengesetzte Poisson Verteilung mit $\lambda = \dfrac{1}{(1+\theta)\beta}$ und individueller Schadenzahlung wie $X_{2,i}$

=> $\Psi(u,t) \approx \Psi_d(u\beta,(1+\theta)\beta t)$

7.9.3 Numerische Illustration

In diesem Abschnitt betrachten wir die numerische Illustration von den Approximationsmethoden.

1. Illustration

$F(x) = 1 - e^{-x}$, $u \ge 0$ $x \ge 0$

wir wissen fur $u \ge 0$, $\Psi(u) = \dfrac{1}{1+\theta} \exp\left\{ \dfrac{-\theta u}{(1+\theta)} \right\}$

um die Methode der Grenze in 7.9.1 zu benutzen setzen wir

$m_1 = 1 \quad k(x) = f(x) = e^{-x} \quad \theta = 0{,}1$

Table 7.2 *Bounds for $\psi(u)$, exponential claims*

	Lower Bounds for $\psi(u)$				Upper Bounds for $\psi(u)$		
u	$\kappa = 20$	$\kappa = 50$	$\kappa = 100$	$\psi(u)$	$\kappa = 100$	$\kappa = 50$	$\kappa = 20$
5	0.57102	0.57464	0.57584	0.57703	0.57822	0.57941	0.58294
10	0.35867	0.36323	0.36475	0.36626	0.36778	0.36929	0.37381
15	0.22529	0.22960	0.23104	0.23248	0.23392	0.23537	0.23970
20	0.14151	0.14513	0.14635	0.14756	0.14879	0.15001	0.15370
25	0.08889	0.09174	0.09270	0.09366	0.09463	0.09561	0.09856
30	0.05583	0.05799	0.05872	0.05945	0.06019	0.06094	0.06320

Table 7.3 *Approximations to $\psi(u)$ by averaging bounds, exponential claims*

u	$\kappa = 20$	$\kappa = 50$	$\kappa = 100$	$\psi(u)$
5	0.57698	0.57703	0.57703	0.57703
10	0.36624	0.36626	0.36626	0.36626
15	0.23250	0.23249	0.23248	0.23248
20	0.14761	0.14757	0.14757	0.14756
25	0.09373	0.09368	0.09367	0.09366
30	0.05952	0.05947	0.05946	0.05945

7.2 zeigt die Werte der Grenzen von $\Psi(u)$.

Mit wachsendem κ werden die unteren Grenzen wachsen und die oberen Grenzen fallen, und zum Beispiel mit u = 30 erhalten wir auf zwei Nachkommenstellen gerundete Grenzen 0.06, dann ist auf zwei Nachkommenstellen $\Psi(u)$ = 0.06

und mit wachsendem κ ist es möglich noch mehr übereinstimmende Nachkommastellen zu erhalten.

7.3 zeigt wie man die Approximation durch Mittelwertbildung der Grenze erhält. Dies gibt eine sehr gute Approximation, besonders wenn κ =100 ist.

Table 7.4 *Approximations to $\psi(u)$, exponential claims*

u	$\beta = 20$	$\beta = 50$	$\beta = 100$	$\psi(u)$
5	0.57709	0.57704	0.57704	0.57703
10	0.36633	0.36628	0.36627	0.36626
15	0.23255	0.23249	0.23248	0.23248
20	0.14762	0.14757	0.14757	0.14756
25	0.09371	0.09367	0.09367	0.09366
30	0.05948	0.05946	0.05945	0.05945

Table 7.5 *Approximations to $\psi(u)$, Pa (4,3) claims*

u	$\beta = 20$	$\beta = 50$	$\beta = 100$
10	0.47524	0.47520	0.47519
20	0.26617	0.26614	0.26613
30	0.15136	0.15134	0.15133
40	0.08689	0.08687	0.08687
50	0.05027	0.05026	0.05026
60	0.02930	0.02929	0.02929

7.4 zeigt die Approximation unter Anwendung der rekursiven Berechnung von 7.9.2

2. Illustration
   Individuelle Schadenforderung hat Verteilung Pa(4, 3)
   ⇨ es gibt keine explizite Lösung für Ψ
   aber man kann Ψ gut approximieren

7.5 zeigt mit Methoden von 7.9.2
für k=100 ist der Wert sehr nahe vom echten Ψ.

7.10 Approximative Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit

Idee von De Vyldersche Methode: Wir approximieren die Wahrscheinlichkeit vom absuluten Ruin von einem klassischen Risikoprozess $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ durch einen klassischen Risikoprozess $\{\tilde{U}(t)\}_{t\geq 0}$ mit folgende Eigenschaften:

$\Rightarrow$ $\tilde{U}(0) = u$

$\Rightarrow$ Poisson Parameter ist $\tilde{\lambda}$

$\Rightarrow$ Das Prämieneinkommen pro Zeiteinheit ist $\tilde{c}$

$\Rightarrow$ Die Verteilung der individuellen Schadenzahlung ist $\tilde{F}(x) = 1 - \exp\{-\tilde{\alpha}x\}$

Aus (7.11) $\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c}\exp\{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u\}$ für F(x) $= 1 - e^{-\alpha x}$ $x \geq 0$

foglt $\phi(\tilde{u}) = 1 - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}\tilde{c}}\exp\{-(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}})u\}$

und durch Momentvergleich können wir $\tilde{\lambda}, \tilde{c}, \tilde{\alpha}$ bestimmen.

1. setze E[U(t)] = E[$\tilde{U}$ (t)]

$\Rightarrow$ u + ct + λm_1 = u + $\tilde{c}$ t + $\tilde{\lambda}$ t/$\tilde{\alpha}$

$\Rightarrow$ $\tilde{c}$ = c + λm_1 + $\tilde{\lambda}/\tilde{\alpha}$

2. setze $E[(U(t) - E[U(t)])^2]$ = $E[(\tilde{U}(t) - E[\tilde{U}(t)])^2]$

wir wissen U(t)-E[U(t)] = -S(t) + $\lambda m_1 t$

$\Leftrightarrow$ V[S(t)] = V[$\tilde{S}(t)$]

$\Leftrightarrow$ $\lambda m_2 = 2\tilde{\lambda}/\tilde{\alpha}^2$

3. setze $E[(U(t) - E[U(t)])^3] = E[(\tilde{U}(t) - E[\tilde{U}(t)])^3]$

$\Leftrightarrow$ Sk[S(t)] = Sk[$\tilde{S}$ (t)]

$\Leftrightarrow$ $\lambda m_3 = 6\tilde{\lambda}/\tilde{\alpha}^3$

$\Rightarrow \tilde{\alpha} = 3m_2/m_3$

$\Rightarrow \tilde{\lambda} = 9\lambda m_2^3/2m_3^2$

$\Rightarrow \tilde{c} = 3\lambda m_2^2/2m_3$

und die Voraussetzung für die Anwendung der De Vylderschen Approximation ist die Existenz von den ersten 3 Momenten der individuellen Schadenzahlung.