Kirill Rudnik

Das kollektive Risikomodell

12. Mai 2009

4.1 Einleitung

Wir betrachten in diesem Kapitel die Gesamtforderungen im Laufe eines Jahres. Beim Abschluss eines Versicherungsvertrages weiß der Versicherer nicht, wie viele Forderungen auf ihn zukommen werden, und wenn Forderungen zukommen ist die Größe der Forderungen ebenfalls unbekannt.

4.2 Modell

Die Gesamtforderungen bezeichnen wir mit der Zufallsvariable S
Die Anzahl der einzelnen Forderungen bezeichnen wir mit der Zufallsvariable N
Zufallsvariable X_i bezeichnet die Größe der Forderung i.

Daraus folgt: $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$
(Für $N = 0$ (keine Forderungen) ist auch $S = 0$).
Wir modellieren X_i als nicht-negative Zufallsvariablen mit einem positiven Mittelwert.

Annahmen:

1. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ sind unabhängige und gleichverteilte ZV
2. N ist unabhängig von X_i

1. bedeutet, dass die Größe der Forderungen i keine Auswirkungen auf die Größe der Forderung $j \neq i$ hat und dass die Größen im Betrachtungszeitraum gleichverteilt sind.

2. bedeutet, dass die Anzahl der Forderungen nicht von der Größe der Forderungen abhängt.

4.2.1 Die Verteilung von S

Notation:

$G(x) = Pr(S \leq x)$ ist Verteilungsfunktion von S
$F(x) = Pr(X_1 \leq x)$ ist die Verteilungsfunktion von X
$p_n = Pr(N = n)$ ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion für n Forderungen, $n = 1,2,3,...$

Also:

$$G(x) = Pr(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr(S \leq x \, und \, N = n)$$

$$Pr(S \leq x \, und \, N = n) = Pr(S \leq x \mid N = n) \, Pr(N = n)$$

$$Pr(S \leq x \mid N = n) = Pr\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right) = F^{(n*)}(x)$$

Für $x \geq 0$ $G(x)=\sum_{i=1}^{\infty} p_n F^{(n*)}(x)$ mit $F^{(0*)}(x)= 1$ für $x \geq 0$; 0 sonst. (4.1)

Falls die Einzelforderungen X_i nur auf ganzen Zahlen verteilt sind mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $f_j = F(j) - F(j-1)$ für $j = 1,2,3,...$, dann ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\{g_x\}_{x=0}^{\infty}$ von S gegeben durch $g_0 = p_0$ und für $x = 1,2,3,...$,

$$g_x=\sum_{n=1}^{\infty} p_n f_x^{(n*)} \quad \text{mit} \quad f_x^{(n*)}=Pr\left(\sum_{i=1}^{n} X_i=x\right) \qquad (4.2)$$

Formeln (4.1) und (4.2) sind eine Möglichkeit, die Verteilung der Gesamtforderungen zu bestimmen.

Problem: die Faltung $F^{(n*)}$ existiert für viele Verteilungen der Einzelforderungen (z.B. Pareto- und Lognormal-Verteilungen) nicht in einer geschlossenen Form. Ein weiteres Problem ist die unendliche Summe.
Aber: für bestimmte Verteilungen von N ist es möglich, g_x rekursiv zu bestimmen. (Kapitel 4.5)

4.2.2 Momente von *S*

Um die Momente und die momenterzeugende Funktion von S zu berechnen, argumentieren wir mit dem bedingten Erwartungswert.

Für zwei unabhängige Variablen Y und Z, für die die von uns gebrauchten Momente existieren, gilt:
$E[Y] = E[E(Y \mid Z)]$ (4.3)
und $V[Y] = E[V(Y \mid Z)]+V[E(Y \mid Z)]$ (4.4)

Aus (4.3) folgt $E[S]=E[E(S \mid N)]$.

Das k-te Moment ist $m_k = E[X^k]$ für $k = 1,2,3, ...$ Da Xi unabhängige ZV, gilt $m_k=E\left[X_1^k\right]$

Also $E[S \mid N=n]=E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} E[X_i]=nm_1$

Diese Gleichung gilt für alle $n = 0,1,2,....$ Also ist $E[S \mid N] = Nm_1$
Deswegen gilt $E[S] = E[Nm_1] = E[N]\, m_1$ (4.5)

Das Ergebnis (4.5) sagt uns, dass die erwarteten Gesamtforderungen gleich dem Produkt aus der erwarteten Anzahl und der erwarteten Größe der Einzelforderungen sind.

Ähnlich gilt für die Varianz:

$$V[S \mid N=n]=V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]=\sum_{i=1}^{n} V[X_i]=n(m_2-m_1^2)$$

Unter Benutzung von (4.4) gilt nun:

$$V[S]=E[V(S \mid N)]+V[E(S \mid N)]=E[N(m_2-m_1^2)]+V[Nm_1]=E[N](m_2-m_1^2)+V[N]m_1^2 \qquad (4.6)$$

Analog kann man auch die momenterzeugende Funktion von S bestimmen.

Wir wissen: $M_S(t)=E[e^{tS}]=E[E(e^{tS} \mid N)]$

und $E[e^{tS} \mid N=n]=E\left[\exp(t\sum_{i=1}^{n} X_i)\right]=\prod_{i=1}^{n} E[\exp(tX_i)]$ da X_i unabhängige ZV.

Da X_i gleichverteilt, gilt $E[e^{tS} \mid N=n]=M_X(t)^n$ mit $M_X(t)=E[e^{(tX_1)}]$

Dies führt zu: $M_S(t)=E[M_X(t)^n]=E[\exp(\log M_X(t)^n)]=E[\exp(N\log M_X(t))]=M_N[\log M_X(t)]$ (4.7)

Wir haben also M_S in M_N und M_X ausgedrückt.

Nach einer ähnlichen Rechnung folgt für $P_S(r)$, wenn X_1 eine diskrete und auf ganzen Zahlen verteilte ZV ist mit wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion P_X:

$P_S(r) = P_N[P_X(r)]$, da nach Definition $P_S(r) = E[r^S]$ und $E[r^S \mid N=n] = E[r^{nX_1}] = P_X(r)^n$

mit P_S und P_N = wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen von S und N.

4.3 Die zusammengesetzte Poisson-Verteilung

Falls N Poisson-verteilt ist mit Parameter λ, sagen wir, dass S die zusammengesetzte Poisson-Verteilung hat mit Parametern λ und F. Da Erwartungswert und Varianz von $P(\lambda)$ gleich λ, folgt nach (4.5) und (4.6) für S:

$E[S] = \lambda m_1$ und $V[S] = \lambda m_2$

Das dritte zentrale Moment ist $E[(S-E(S))^3] = E[(S-\lambda m_1)^3] = \lambda m_3$ (4.8)

Beweis von (4.8):

Wir wissen: $M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Nach (4.7) folgt nun $M_S(t) = M_N[\log M_X(t)] = e^{\lambda(M_x(t)-1)}$ (4.9)

Die Ableitung nach t liefert:

$M_S'(t) = \lambda M_X'(t) M_S(t)$, $M_S''(t) = \lambda M_X''(t) M_S(t) + \lambda M_X'(t) M_S'(t)$ und

$M_S'''(t) = \lambda M_X'''(t) M_S(t) + 2\lambda M_X''(t) M_S'(t) + \lambda M_X'(t) M_S''(t)$ (4.10)

Setze $t = 0$ in (4.10) ein (daraus folgt $M_X(0) = 1$ und $M_S(0) = 1$):

$$E[S^3] = \lambda m_3 + 2\lambda m_2 E[S] + \lambda m_1 E[S^2] = \lambda m_3 + 2V[S]E[S] + E[S]E[S^2] = \lambda m_3 + 3E[S]E[S^2] - 2E[S]^3$$

Nun folgt:

$$E[(S-\lambda m_1)^3] = E[S^3 + 3S(\lambda m_1)^2 - 3S^2 \lambda m_1 - (\lambda m_1)^3] = E[S^3] + 3E[S]E[S]^2 - 3E[S^2]E[S] - E[S]^3$$

$$= \lambda m_3 + 3E[S^2]E[S] - 3E[S^2]E[S] - 2E[S]^3 + 2E[S]^3$$

$$= \lambda m_3$$

Wichtig für 4.8: bei der zusammengesetzten Poisson-Verteilung ist die Verteilung rechtsschief (die Neigungsstärke ist positiv unter unseren Annahmen, dass $Pr(X_1 < 0) = 0$ und $m_1 > 0$, was auch bedeutet, dass $m_k > 0$ für $k = 2,3,4,...$). Dies sieht man an $Sk[S] = \frac{E[(S-\lambda m_1)^3]}{V[S]^{3/2}} = \frac{\lambda m_3}{(\lambda m_2)^{3/2}} > 0$

Eine wichtige Eigenschaft der Zufallsvariablen, die nach der zusammengesetzten Poisson-Verteilung verteilt sind, ist, dass die Summe von unabhängigen, aber nicht unbedingt gleichverteilten Zufallsvariablen eine Zufallsvariable ergeben, die wieder zusammengesetzt Poisson-verteilt ist.

Konkret:

Seien $\{S_i\}_{i=1}^n$ unabhängige zusammengesetzt Poisson-verteilte ZV mit Parametern λ_i und F_i.

Sei $\Psi = \sum_{i=1}^n S_i$. Dann hat Ψ die zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Parametern Λ und Φ mit $\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

und $\Phi(x) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i(x)$ (4.11)

Beweis:

Die momenterzeugende Funktion von Ψ ist:

$$E[\exp(t\Psi)] = E[\exp(t(S_1+...+S_n))] = \prod_{i=1}^{n} E[\exp(tS_i)] \quad \text{, da } \{S_i\}_{i=1}^{n} \text{ unabhängig.}$$

Nach (4.9) folgt nun: $E[\exp(tS_i)] = \exp(\lambda_i(M_i(t)-1))$

Also:

$$E[\exp(t\Psi)] = \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i(M_i(t)-1)) = \exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(M_i(t)-1))$$

$$= \exp(\Lambda(\sum_{i=1}^{n} (\frac{\lambda_i M_i(t)}{\Lambda}) - 1))$$

Für die momenterzeugende Funktion von Ψ mit der Verteilungsfunktion Φ gilt:

$$\int_0^{\infty} e^{tx} d\Phi(x) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^{\infty} e^{tx} dF_i(x) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\lambda_i M_i(t)}{\Lambda})$$

Also ist Ψ zusammengesetzt Poisson-verteilt.

4.4 Effekt der Rückversicherung

Wir untersuchen, wie sich eine Rückversicherung auf die Verteilung von Gesamtforderungen auswirkt.

4.4.1 Proportionale Rückversicherung

Der Versicherer übernimmt Anteil a von jeder Forderung, der Rückversicherer $(1 - a)$.

Versicherer : $S_I = \sum_{i=1}^{N} aX_i = aS$ mit $S_I = 0$ falls $S = 0$

Rückversicherer : $S_R = (1-a)S$

Also: die Gesamtforderungen für den Versicherer und den Rückversicherer sind weiterhin zusammengesetzt Poisson-verteilt, die Verteilung der Einzelforderungen bleibt ebenfalls gleich. Der Erwartungswerte der Einzelforderungen betragen aX_i für den Versicherer und $(1 - a)X_i$ für den Rückversicherer.

4.4.2 Schadenexzedentenversicherung (Excess of Loss)

Mit Maximum M ergibt sich:

Versicherer : $S_I = \sum_{i=1}^{N} min(X_i, M)$ mit $S_I = 0$ falls $N = 0$

Rückversicherer : $S_R = \sum_{i=1}^{N} max(0, X_i - M)$ mit $S_R = 0$ falls $N = 0$ (4.12)

S_R kann 0 betragen auch wenn $N > 0$ ist, und zwar genau dann, wenn die Einzelforderung das Maximum M nicht übersteigen.

Wenn wir nur Forderungen betrachten die größer als M sind, kann man S_R auch so aufschreiben:

$$S_R = \sum_{i=1}^{N_R} X_i^R \quad \text{mit} \quad X_i^R = X_i - M > 0$$

Mit dieser Schreibweise ist $S_R = 0$ falls $N_R = 0$.

Also ist nach (1.13) (erster Vortrag): $Pr(X_i^R \leq x) = \frac{F(x+M)-F(M)}{1-F(M)}$

Um die Verteilung von N_R zu bestimmen, definieren wir eine Zufallsvariable $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$, mit $I_j = 1$ für $X_j > M$ und $I_j = 0$ sonst. Dann:

$$Pr(I_j=1) = Pr(X_j > M) = 1 - F(M) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_M \quad \text{und} \quad N_R = \sum_{i=1}^{N} I_j \quad ,$$

mit $N_R = 0$ falls $N = 0$.

Da N_R eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung hat, gilt für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $P_{N_R}(r) = P_N[P_I(r)]$, wobei P_I die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von I ist.

Es gilt:

$$P_I(r) = E[r^I] = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P[I=n] = 1 * P[I=0] + r * P[I=1] = F_M + r(1-F_M) = 1 - \pi_M + \pi_M r$$

4.5 Rekursive Berechnung von Verteilungen der Gesamtforderungen.

Wir werden in 4.5 die Panjer-Rekursion herleiten. Mithilfe dieser Rekursion kann man die Verteilung der Gesamtforderungen rekursiv bestimmen, wenn die Größe der Einzelforderungen auf positiven ganzen Zahlen verteilt ist und wenn die Forderungsanzahl zur (*a*, *b*, 0) - Verteilungsklasse gehört.

4.5.1 Die (*a*, *b*, 0) - Verteilungsklasse

Definition: Eine Verteilung gehört zur (*a*, *b*, 0) - Verteilungsklasse, wenn die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ rekursiv ermittelt werden kann, mit $p_n = (a + \frac{b}{n}) p_{n-1}$ (4.13)

für $n = 1,2,3,...$, mit a und b konstant. Der Startwert p_0 ist größer 0, dafür steht 0 in der Bezeichnung "(*a*, *b*, 0) - Verteilungsklasse". Es gibt drei nicht-triviale Verteilungen in dieser Klasse: Poisson-, Binomial-, und negative Binomialverteilungen.

Nun betrachten wir die Formel für p_1: $p_1 = (a + b)p_0$.
Man sieht, $a + b \geq 0$, da sonst $p_1 < 0$.

Fallunterscheidung:

1. Fall: $a + b = 0$

Dann $p_n = 0$ für $n = 1,2,3,...$, und $p_0 = 1$, da $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ => Triviale Verteilung

2.Fall: $a = 0$, $b > 0$

Dann $p_n = (b/n)p_{n-1}$ für $n = 1,2,3,...$, so dass $p_n = \frac{b}{n}\frac{b}{n-1}...\frac{b}{2} b\, p_0 = \frac{b^n}{n!} p_0$

Unter Benutzung der Tatsache, dass $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ und $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = p_0 e^b$

folgt: $p_0 = e^{-b}$
Wir haben also Poisson-Verteilung mit $\lambda = b$.

3. Fall: $a > 0$, $a \neq -b$ mit $a + b > 0$.

Nach (4.13) folgt für p_n:

$$p_n = (a + \frac{b}{n})(a + \frac{b}{n-1})...(a + \frac{b}{2})(a+b)\, p_0 = \frac{(an+b)(a(n-1)+b)...(2a+b)(a+b)}{n(n-1)...2} p_0$$

$= \quad \frac{a^n}{n!}(n+\frac{b}{a})(n-1+\frac{b}{a})...(2+\frac{b}{a})(1+\frac{b}{a})\,p_0$

Nun setzen wir $\mathring{a} = 1 + b/a$ und erhalten: $\quad p_n = \frac{a^n}{n!}(n-1+\mathring{a})(n-2+\mathring{a})...(1+\mathring{a})\mathring{a}\,p_0 = \frac{(\mathring{a}+n-1)!}{n!(\mathring{a}-1)!}a^n\,p_0$

$= \quad \binom{\mathring{a}+n-1}{n}a^n\,p_0 \qquad (4.14)$

Da $p_0 > 0$, muss $\quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n < 1$.

Absolute Konvergenz liegt vor, wenn $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{p_n}{p_{n-1}}\right| < 1$, d.h für $0 < a < 1$.

Also gilt

$$p_0 + p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\mathring{a}+n-1}{n} a^n = 1$$

Wir wissen aus 1.2.3, dass für $NB\ (k, p)$ gilt: $\quad Pr(N=n) = \binom{k+n-1}{n} p^k q^n$.

Also gilt auch:

$$P^k \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} q^n = 1 - p^k \quad \text{mit } p + q = 1$$

Wir haben also eine negative Binomialverteilung mit $k = \mathring{a}$ und $p = 1 - q = 1 - a$. ($NB\ (\mathring{a}, 1 - a)$)

Daraus folgt für p_0: $\quad p_0 = (1-a)^{\mathring{a}}$

<u>4. Fall:</u> $a + b > 0$, $a < 0$.

Es muss also eine positive Zahl κ existieren, so dass $\quad a + \frac{b}{\kappa+1} = 0$,

mit $p_n = 0$ für $n = \kappa + 1, \kappa + 2, ...$ Falls dies nicht der Fall wäre, gäbe es ein n, so dass $a + b/n < 0$ und wir hätten negative Werte für p_n .

Wir verfahren wie im 3. Fall. Dies liefert uns:

$$p_n = \frac{a^n}{n!}(n+\frac{b}{a})(n-1+\frac{b}{a})...(2+\frac{b}{a})(1+\frac{b}{a})\,p_0$$

Mit $\kappa = -(1 + b/a)$:

$$p_n = \frac{a^n}{n!}(-\kappa+n-1)(-\kappa+n-2)...(-\kappa+1)(-\kappa)\,p_0$$

$= \quad (-1)^n \frac{a^n}{n!}(\kappa-n+1)(\kappa-n+2)...(\kappa-1)(\kappa)\,p_0$

$= \quad (-1)^n \frac{a^n}{n!}\frac{\kappa!}{(\kappa-n)!}\,p_0$

$= \quad (-a)^n \binom{\kappa}{n} p_0$

Wir haben angenommen, dass $a < 0$, nun setzen wir $A = -a > 0$. Dann:

$$p_0 + p_0 \sum_{n=1}^{\kappa} \binom{\kappa}{n} A^n = p_0 \sum_{n=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{n} A^n = 1$$

Um nun p_0 zu bestimmen, können wir $A = p/(1 - p)$ setzen, dies ist äquivalent zu $p = A/(1 + A) = a/(a - 1)$, so dass $0 < p < 1$ ist.

Also: $\quad p_0 \sum_{n=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{n} p^n (1-p)^{-n} = 1$

Mit $\quad p_0 = (1-p)^{\kappa} \quad$ haben wir Binomialverteilung mit Parametern κ und $a/(a - 1)$, also $B\ (\kappa, a/(a-1))$

Zur Erinnerung: für *B* (*n*, *q*) gilt: $Pr(N=x)=\binom{n}{x}q^x(1-q)^{n-x}$

Zusammenfassung der Werte von *a* und *b*:

	a	***b***
***P* (*λ*)**	0	*λ*
***B* (*n*, *q*)**	-*q*/(1 - *q*)	(*n* + 1)*q*/(1 - *q*)
***NB* (*k*, *p*)**	1 - *p*	(1 - *p*)(*k* - 1)

Nun betrachten wir die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von der (*a*, *b*, 0) - Verteilungsklasse.

Nach Definition: $P_N(r)=p_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n p_n$

Ableitung nach *r* liefert:

$$P_N^{'}(r)=\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}p_n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)p_{n-1}$$
$$= a\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}p_{n-1}+b\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}p_{n-1}$$
$$= a\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}p_{n-1}+b\,P_N(r)$$

Unter Benutzung der Identität *n* = *n* - 1 + 1 :

$$a\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}p_{n-1}=a\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)r^{n-1}p_{n-1}+a\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}p_{n-1}$$
$$= r\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)r^{n-2}p_{n-1}+a\,P_N(r)$$
$$= ar\,P_N^{'}(r)+a\,P_N(r)$$

Also: $P_N^{'}(r)=ar\,P_N^{'}(r)+(a+b)P_N(r)$ (4.15)

Diese Differentialgleichung ist lösbar, die Lösung spielt aber für unsere weiteren Überlegungen keine Rolle.

4.5.2 Die Panjer-Rekursionformel

Die Panjer-Rekursionformel ist nicht nur wichtig bei der Bestimmung der Verteilung von Gesamtforderungen, sie wird auch in Ruintheorie benutzt (Kap. 7). Mit der Rekursionsformel ist es möglich, die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Gesamtforderungen zu bestimmen, wenn die Anzahl der Forderungen zur (*a*, *b*, 0) - Verteilungsklasse gehört und die Größen der Einzelforderungen diskret verteilt sind mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$.

Wir nehmen an, die Größen der Einzelforderungen können nur ganze positive Zahlen annehmen. Dann ist auch *S* auf ganzen positiven Zahlen verteilt. $S=\sum_{i=1}^{N} X_i$, *S* = 0 wenn *N* = 0, oder wenn *N* = *n* und $\sum_{i=1}^{n} X_i=0$.

Aus der Unabhängigkeit von X_i folgt: $Pr(\sum_{i=1}^{N} X_i=0)=f_0^n$

Nach 4.2.1 folgt: $g_0=p_0+\sum_{i=1}^{\infty} p_n f_0^n=P_N(f_0)$ (4.16)

Nach 4.2.2 folgt: $P_S(r)=P_N[P_X(r)]$ (4.17)

Die Ableitung nach r liefert: $P_S'(r) = P_N'[P_X(r)]\,P_X'(r)$ (4.18)

Nun wenden wir die hergeleitete Formel (4.15) (Wir müssen r durch $P_X(r)$ ersetzten)

$$P_S'(r) = (aP_X(r)P_N'[P_X(r)] + (a+b)P_N[P_X(r)])\,P_X'(r)$$

oder, wenn wir (4.17) und (4.18) benutzen:

$$P_S'(r) = aP_X(r)P_S'(r) + (a+b)P_S(r)P_X'(r) \qquad (4.19)$$

Da P_S und P_X wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen sind, sind sie gegeben durch $P_S(r) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j$ und

$$P_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k$$

Die Ableitungen nach r: $P_S'(r) = \sum_{j=0}^{\infty} j r^{j-1} g_j$ und $P_X'(r) = \sum_{k=0}^{\infty} k r^{k-1} f_k$

Nach (4.19) folgt: $\sum_{j=0}^{\infty} j r^{j-1} g_j = a\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} j r^{j-1} g_j\right) + (a+b)\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} k r^{k-1} f_k\right)$

und nach Multiplikation mit r :

$$\sum_{j=0}^{\infty} j r^j g_j = a\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} j r^j g_j\right) + (a+b)\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} k r^k f_k\right) \qquad (4.20)$$

Wir wollen nun eine Formel für g_x , $x = 1,2,3,...,$aus (4.20) herleiten. Dafür machen wir Koeffizientenvergleich.

1. Auf der linken Seite ist der Koeffizient von r^x gleich xg_x .
2. Nun betrachten wir das erste Produkt auf der rechten Seite. r^x kriegen wir dann, wenn wir r^k mit r^{x-k} multiplizieren für $k = 0,1,2,...,x$. Also ist der Koeffizient von r^x gleich

$$a\sum_{k=0}^{x} f_k (x-k) g_{x-k}$$

3.Analog ermitteln wir den Koeffizienten im zweiten Produkt auf der rechten Seite:

$$(a+b)\sum_{k=0}^{x} k f_k g_{x-k}$$

Also können wir jetzt schreiben:

$$x g_x = a\sum_{k=0}^{x} f_k (x-k) g_{x-k} + (a+b)\sum_{k=0}^{x} k f_k g_{x-k} = a f_0 x g_x + a\sum_{k=1}^{x} f_k (x-k) g_{x-k} + (a+b)\sum_{k=1}^{x} k f_k g_{x-k}$$

$$(1-af_0)x g_x = \sum_{k=1}^{x} (a(x-k) + (a+b)k) f_k g_{x-k}$$

$$g_x = \frac{1}{1-af_0}\sum_{k=1}^{x}\left(a + \frac{bk}{x}\right) f_k g_{x-k} \qquad (4.21)$$

Formel (4.21) heißt Panjer-Rekursionsformel, der Startwert g_0 ist gegeben durch (4.16). Die Berechnung von g_x erfolgt rekursiv.

Im Allgemeinen ist es nicht möglich, die Verteilungsfunktion rekursiv zu bestimmen. Falls N allerdings geometrisch verteilt ist (Spezialfall von der negativen Binomialverteilung), kann die Verteilungsfunktion von S rekursiv bestimmt werden.

N geometrisch verteilt, also $p_n = pq^n$ für $n = 0,1,2,...$
Dann ist $a = q$ und $b = 0$. Einsetzten in (4.21) ergibt :

$$g_x = \frac{q}{1-qf_0} \sum_{k=1}^{x} f_k g_{x-k}$$

Und für $y = 1,2,3,...,$

$$G(y) = \sum_{x=0}^{y} g_x = g_0 + \sum_{x=1}^{y} \frac{q}{1-qf_0} \sum_{k=1}^{x} f_k g_{x-k}$$

$$= \quad g_0 + \frac{q}{1-qf_0} \sum_{k=1}^{y} f_k \sum_{x=k}^{y} g_{x-k}$$

$$= \quad g_0 + \frac{q}{1-qf_0} \sum_{k=1}^{y} f_k G(y-k) \quad (4.22)$$

Die rekursive Bestimmung von der Verteilungsfunktion von S wenn N geometrisch verteilt ist wird uns im Kapitel 7 (Ruintheorie) nochmal begegnen.