Seminar Versicherungsrisiko und Ruin

Prof.Dr.Hanspeter Schmidli
19.05.2009

Das Kollektive Risikomodell II

4.6. Erweiterung der Panjer Rekursionsformel

4.6.1. Die (a,b,1)-Verteilungsklasse.

Eine Verteilung gehört zur (a,b,1)Klasse,wenn ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ rekursiv durch die Formel $q_n = \left(a+\frac{b}{n}\right)q_{n-1}$ (4.23)

für n=2,3,4,…berechnet werden kann,wobei a und b Konstant sind.

Bem: $q_1 > 0$

1. Methode: Null-Trunkierung

Sei $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion aus der (a,b,0)Klasse. Die entsprechend

q_n in der (a,b,1)Klasse ist $q_n = \frac{p_n}{1-p_0}$ für n=1,2,3,…

2. Methode: Null-Modifizierung

Sei $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion aus der (a,b,0)Klasse. Die entsprechend

q_n in der (a,b,1)Klasse ist $q_n = \frac{1-\alpha}{1-p_0}p_n$, für n=1,2,3,… und $q_0=\alpha$ mit $0<\alpha<1$.

Es gibt vier anderen Elementen von (a,b,1)Klasse, zwei davon sind Logarithmische-Verteilung und erweiterte trunkierende negative binomialverteilung.
Durch die Null-modifizierende Form von der beiden Verteilungen können wir die übrigen zwei Verteilungen erstellen,wenn alle Verteilungen auf positive ganzzahl definiert sind.

Wenn die Anzhal des Schadens zur (a,b,1)-Verteilungsklasse gehört und die Höhe des individuellen Schadens auf natürliche Zahlen verteilt ist, dann kann man eine rekursive Formel für die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens ableiten.

Sei $Q_N(r)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n q_n$ wobei $q_n=\left(a+\frac{b}{n}\right)q_{n-1}$ für n=1,2,3,…

$$\Rightarrow \quad Q_N(r)=q_0+rq_1+\sum_{n=2}^{\infty} r^n q_n \quad , \quad Q_N'(r)=q_1+\sum_{n=2}^{\infty} nr^{n-1}q_n$$

$$\Rightarrow \quad Q_N'(r)=q_1+\sum_{n=2}^{\infty} nr^{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)q_{n-1}$$

$$=q_1+\left(a\sum_{n=2}^{\infty} nr^{n-1}q_{n-1}+b\sum_{n=2}^{\infty} r^{n-1}q_{n-1}\right)$$

$$=q_1+\left[a\left(\sum_{n=2}^{\infty} nr^{n-1}q_{n-1}+q_0\right)+b\left(\sum_{n=2}^{\infty} r^{n-1}q_{n-1}+q_0\right)\right]-aq_0-bq_0$$

$$=\left[q_1-(a+b)q_0\right]+\left[a\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}q_{n-1}+b\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}q_{n-1}}_{Q_N(r)}\right]$$

Unter Benutzung der Identität n=n-1+1

$$a\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}q_{n-1}=a\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)r^{n-1}q_{n-1}+a\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}q_{n-1}}_{Q_N(r)}$$

$$=ar\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)r^{n-2}q_{n-1}}_{Q_N'(r)}+aQ_N(r)$$

$$=arQ_N'(r)+aQ_N(r)$$

$$\Rightarrow \quad Q_N'(r)=\left[q_1-(a+b)q_0\right]+arQ_N'(r)+(a+b)Q_N(r).$$

Und $P_S(r)=Q_N\left[P_X(r)\right] \Rightarrow P_S'(r)=Q_N'\left[P_X(r)\right]P_X'(r)$

$$\Rightarrow P_S'(r)=\left[\left(q_1-(a+b)q_0\right)+aP_X(r)Q_N'\left(P_X(r)\right)+(a+b)Q_N\left(P_X(r)\right)\right]P_X'(r)$$

$$=\left[q_1-(a+b)q_0\right]P_X'(r)+aP_X(r)\underbrace{Q_N'\left(P_X(r)\right)P_X'(r)}_{P_S'(r)}+(a+b)\underbrace{Q_N\left(P_X(r)\right)}_{P_S(r)}P_X'(r)$$

$$\Rightarrow \; P_S'(r) = \left[q_1 - (a+b)q_0\right] P_X'(r) + aP_X(r)P_S'(r) + (a+b)P_S(r)P_X'(r) \qquad (4.24)$$

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen von P_S und P_X sind durch

$P_S(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k g_k$ und $P_X(r) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j$ gegeben.

Die Ableitung nach r: $P_S'(r) = \sum_{k=0}^{\infty} k r^{k-1} g_k$, $P_X'(r) = \sum_{j=0}^{\infty} j r^{j-1} f_j$

nach (4.24) folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} k r^{k-1} g_k = \left[q_1 - (a+b)q_0\right]\left(\sum_{j=0}^{\infty} j r^{j-1} f_j\right) + a\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} k r^{k-1} g_k\right) + (a+b)\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k g_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} j r^{j-1} f_j\right)$$

beide Seiten multiplizieren mit r:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k r^{k} g_k = \left[q_1 - (a+b)q_0\right]\left(\sum_{j=0}^{\infty} j r^{j} f_j\right) + a\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} k r^{k} g_k\right) + (a+b)\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k g_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} j r^{j} f_j\right)$$

Dann machen wir die Koeffizientenvergleich:

linke Seite ist der Koeffizient von r^x gleich xg_x

rechte Seite:

der Koeffizien des erste Produkts von r^x gleich $\left[q_1 - (a+b)q_0\right] x f_x$

der Koeffizien des zweite Produkts von r^x gleich $a\sum_{j=0}^{x} f_j (x-j) g_{x-j}$, für j=0,1,2,…,x

der Koeffizien des dritte Produkts von r^x gleich $(a+b)\sum_{j=0}^{x} j f_j g_{x-j}$, für j=0,1,2,…x

$$\Rightarrow xg_x = \left[q_1 - (a+b)q_0\right] x f_x + a\sum_{j=0}^{x} f_j (x-j) g_{x-j} + (a+b)\sum_{j=0}^{x} j f_j g_{x-j}$$

$$= \left[q_1 - (a+b)q_0\right] x f_x + a f_0 x g_x + a\sum_{j=1}^{x} f_j (x-j) g_{x-j} + (a+b)\sum_{j=1}^{x} j f_j g_{x-j}$$

$$\Leftrightarrow (1 - af_0) x g_x = \left[q_1 - (a+b)q_0\right] x f_x + \sum_{j=1}^{x}\left(ax - \cancel{aj} + \cancel{aj} + bj\right) f_j g_{x-j}$$

$$\Leftrightarrow (1 - af_0) g_x = \left[q_1 - (a+b)q_0\right] f_x + \sum_{j=1}^{x}\left(a + \frac{bj}{x}\right) f_j g_{x-j}$$

Dann folgt rekursive Formel für die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschadens

$$g_x = \frac{1}{\left(1-af_0\right)}\left[\left(q_1-\left(a+b\right)q_0\right) f_x + \sum_{j=1}^{x}\left(a+\frac{bj}{x}\right) f_j g_{x-j}\right] \qquad (4.25)$$

für x=1,2,3,...

mit Anfangswert $$g_0 = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} q_n f_0^n = Q_N\left(f_0\right),\ f_0 > 0 \\ q_0,\ f_0 = 0 \quad und \quad q_0 > 0 \end{cases} \qquad (4.26)$$

falls $q_0 = 0$ und $f_0 = 0$,ist Anfangswert $g_1 = \Pr\left(N=1\right)\Pr\left(X_1=1\right) = q_1 f_1$.

4.6.2 Andere Klassen von Verteilungen

Eine Verteilung gehört zur Schröter Klasse, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion $\left\{p_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ rekursiv durch die Formel $p_n = \left(a+\frac{b}{n}\right)p_{n-1} + \frac{c}{n}p_{n-2}$ (4.27)

für n=1,2,3,…berechnet werden kann, wobei a,b und c Konstant sind und $p_{-1} := 0$.

Wenn die Anzhal des Schadens zur Schröter Klasse gehört und die Höhe des individuellen Schadens auf natürliche Zahlen verteilt ist, dann können wir wieder eine rekursive Formel die Wahrscheinlichkeitsfunktion für Gesamtschaden ableiten.

Sei $P_N\left(r\right) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n p_n$ wobei $p_n = \left(a+\frac{b}{n}\right)p_{n-1} + \frac{c}{n}p_{n-2}$ für n=1,2,3,…

$$\Rightarrow P_N\left(r\right) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n p_n \ , \quad P_N'\left(r\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}p_n$$

$$P_N'\left(r\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}\left[\left(a+\frac{b}{n}\right)p_{n-1} + \frac{c}{n}p_{n-2}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}\left(a+\frac{b}{n}\right)p_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} cr^{n-1}p_{n-2}$$

$$= a\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}p_{n-1} + b\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}p_{n-1}}_{P_N\left(r\right)} + cr\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-2}p_{n-2}}_{P_N\left(r\right)}$$

Unter Benutzung der Identität n=n-1+1

$$a\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}p_{n-1} = a\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)r^{n-1}p_{n-1} + \underbrace{a\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}p_{n-1}}_{P_N(r)}$$

$$= ar\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)r^{n-2}p_{n-1}}_{P_N'(r)} + aP_N(r)$$

$$= arP_N'(r) + aP_N(r)$$

$$\Rightarrow P_N'(r) = arP_N'(r) + (a+b+cr)P_N(r) \qquad (4.28)$$

Und $P_S(r) = P_N\left[P_X(r)\right] \Rightarrow P_S'(r) = P_N'\left[P_X(r)\right]P_X'(r)$

$$\Rightarrow P_S'(r) = \left[aP_X(r)P_N'\left(P_X(r)\right) + \left(a+b+cP_X(r)\right)P_N\left(P_X(r)\right)\right]P_X'(r)$$

$$= aP_X(r)\underbrace{P_N'\left(P_X(r)\right)P_X'(r)}_{P_S'(r)} + \left(a+b+cP_X(r)\right)\underbrace{P_N\left(P_X(r)\right)}_{P_S(r)}P_X'(r)$$

$$= aP_X(r)P_S'(r) + \left(a+b+cP_X(r)\right)P_S(r)P_X'(r) \qquad (4.29)$$

Jetzt definieren wir die Zufallsvariable Y als $Y = X_1 + X_2$,dann $P_Y(r) = P_X(r)^2$

$$\Rightarrow \qquad P_Y'(r) = 2P_X(r)P_X'(r)$$

Nach (4.29) folgt

$$P_S'(r) = aP_X(r)P_S'(r) + (a+b)P_S(r)P_X'(r) + cP_S(r)\underbrace{P_X(r)P_X'(r)}_{\frac{1}{2}P_Y'(r)}$$

$$= aP_X(r)P_S'(r) + (a+b)P_S(r)P_X'(r) + \frac{c}{2}P_S(r)P_Y'(r)$$

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktionen von $P_Y(r)$ ist durch

$P_Y(r) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j^{2*}$ gegeben,da $\Pr(Y = j) = \Pr(X_1 + X_2 = j) = f_j^{2*}$ für j=0,1,2,…

Die Ableitung nach r: $P_Y'(r) = \sum_{j=0}^{\infty} jr^{j-1}f_j^{2*}$

Die Summenform ist:

$$\sum_{j=0}^{\infty} jr^{j-1}g_j = a\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} jr^{j-1}g_j\right) + (a+b)\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1} f_k\right)$$

$$+\frac{c}{2}\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1} f_k^{2*}\right)$$

beide Seiten multiplizieren mit r:

$$\sum_{j=0}^{\infty} jr^{j}g_j = a\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} jr^{j}g_j\right) + (a+b)\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k} f_k\right)$$

$$+\frac{c}{2}\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k} f_k^{2*}\right)$$

Koeffizientenvergleich:

linke Seite ist der Koeffizient von r^x gleich xg_x

rechte Seite:

der Koeffizien des erste Produkts von r^x gleich $a\sum_{j=0}^{x} f_j\left(x-j\right)g_{x-j}$, für j=0,1,2,…,x

der Koeffizien des zweite Produkts von r^x gleich $\left(a+b\right)\sum_{j=0}^{x} jf_j g_{x-j}$, für j=0,1,2,…,x

der Koeffizien des dritte Produkts von r^x gleich $\frac{c}{2}\sum_{j=0}^{x} jf_j^{2*}g_{x-j}$, für j=0,1,2,…,x

$$\Rightarrow xg_x = a\sum_{j=0}^{x} f_j\left(x-j\right)g_{x-j} + \left(a+b\right)\sum_{j=0}^{x} jf_j g_{x-j} + \frac{c}{2}\sum_{j=0}^{x} jf_j^{2*}g_{x-j}$$

$$= af_0 xg_x + a\sum_{j=1}^{x} f_j\left(x-j\right)g_{x-j} + \left(a+b\right)\sum_{j=1}^{x} jf_j g_{x-j} + \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{x} jf_j^{2*}g_{x-j}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1-af_0\right)xg_x = a\sum_{j=1}^{x} f_j\left(x-j\right)g_{x-j} + \left(a+b\right)\sum_{j=1}^{x} jf_j g_{x-j} + \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{x} jf_j^{2*}g_{x-j}$$

Dann folgt rekursive Formel für die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gesamtschaden

$$g_x = \frac{1}{1-af_0}\sum_{j=1}^{x}\left[\left(a+\frac{bj}{x}\right)f_j + \frac{cj}{2x}f_j^{2*}\right]g_{x-j} \qquad (4.30)$$

für x=1,2,3,...

mit Anfangswert $g_0 = P_N\left(f_0\right)$

Diese rekursive Formel hat einen Nachteil, um mit g_x rechnen zu können muss man erst $\left\{ f_j^{2*} \right\}_{j=1}^{\infty}$ berechnen.

Sein N_1 und N_2 unabhängig, N_1 in (a,b,1)Klasse , N_2 eine Poissonverteilung und setzen wir $N_3 = N_1 + N_2$ dann ist die Verteilung von N_3 in Schröter Klasse .

Bew:

Für eine Zufallsvariable N_1 in (a,b,1)Klasse mit Parameter $a = \alpha$ und $b = \beta$,dann ist die Gleichung (4.15) ist $P'_{N_1}(r) = \alpha r P'_{N_1}(r) + (\alpha + \beta) P_{N_1}(r)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{P'_{N_1}(r)}{P_{N_1}(r)} = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha r}$$

und betrachten $\frac{P'_{N_1}(r)}{P_{N_1}(r)} = \frac{d}{dr} \log P_{N_1}(r)$.

Analog für $N_2 \sim P(\lambda)$: $\frac{P'_{N_2}(r)}{P_{N_2}(r)} = \lambda = \frac{d}{dr} \log P_{N_2}(r)$.

Dann für $N_3 = N_1 + N_2$, $\quad P_{N_3}(r) = P_{N_1}(r) P_{N_2}(r)$

$$\Rightarrow \log P_{N_3}(r) = \log P_{N_1}(r) + \log P_{N_2}(r)$$

So dass, $\frac{P'_{N_3}(r)}{P_{N_3}(r)} = \frac{P'_{N_1}(r)}{P_{N_1}(r)} + \frac{P'_{N_2}(r)}{P_{N_2}(r)} = \frac{\alpha + \beta}{1 - \alpha r} + \lambda = \frac{\alpha + \beta + \lambda - \lambda \alpha r}{1 - \alpha r}$.

Jetzt betrachten wir,dass die Verteilung von N zur Schröter Klasse gehört, dann durch die Gleichung (4.28) folgt $\frac{P'_N(r)}{P_N(r)} = \frac{a + b + cr}{1 - ar}$.

Daher, die Verteilung von N_3 gehört zur Schröter Klasse,und die Parmeters sind $a = \alpha, b = \beta + \alpha$ und $c = -\lambda \alpha$.

Eine Verteilung gehört zur R_k Klasse, wenn ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ rekursiv durch die Formel $p_n = \sum_{i=1}^{k}\left(a_i + \frac{b_i}{n}\right)p_{n-i}$ berechnet werden kann, wobei $\{a_i\}_{i=1}^{k}, \{b_i\}_{i=1}^{k}$ Konstant und k eine positive ganzenzahl sind.

(p_n :=0,falls n<0)

4.7 Verwendung der Rekursionsformeln

4.7.1 Diskretisierungsmethode

Um die Rekursionsformel anwenden zu können,ersetzen wir die stetige Verteilung durch die diskrete Verteilug.

<u>1.Methode</u>

Sei F eine stetige Verteilung mit F(0)=0, die entsprechend diskretisierte Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ kann man durch

$$h_j = F(j) - F(j-1) \qquad (4.31)$$

erstellt werden.

Daraus folgt:

$$H(x) = \sum_{j=1}^{x} h_j = F(x) \quad \text{für } x=0,1,2\ldots$$

Für alle $x \geq 0, H(x) \leq F(x)$ s.d H eine untere Schranke von F ist.

Analog können wir eine diskretisierte Verteilung $\tilde{H}$ erstellen, die eine obere Schranke von F ist.

$\Rightarrow$ Für alle $x \geq 0$: $H(x) \leq F(x) \leq \tilde{H}(x)$

<u>2.Methode</u>

Eine alternative Methode ist die Momente der diskreten und stetigen Verteilung zu messen.

Z.B

Wir definieren eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $\left\{\hat{h}_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ mit der Verteilungsfunktion

$\hat{H}$ für die gilt,dass. $\hat{H}(x)=\sum_{j=0}^{x}\hat{h}_j=\int_{x}^{x+1}F(y)dy$ (4.32)

Wenn X~ F und Y~ $\hat{H}$ dann gilt:

$$E[X]=\int_0^{\infty}(1-F(y))dy$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}\int_{x}^{x+1}(1-F(y))$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}\left(1-\hat{H}(x)\right)dy$$

$$=E[Y]$$

$\Rightarrow$ Der Erwartungswert bleibt erhalten.

Obwohl wir bisher auf ganzzahlen diskretisieren,gilt die Methode auch für 0,z,2z,…,wobei z eine beliebige Zahl ist.

Sei Zufallsvaribale S_d als eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung mit Poisson Parameter λ und diskretisierter Verteilung der Höhe des individuellen Schadens mit $Pa(\alpha, k(\alpha-1))$ ist. Dann ist S_d diskrete Zufallsvaribale deren Wahrscheinlichkeitsfunktion mit Hilfe der Panjer Rekursionsformel berechnet werden kann.Die Verteilungsfunktion von S kann gefunden werden sofern gilt,dass

$\Pr(S \le x)=\Pr(kS \le kx)\approx \Pr(S_d \le kx)$

Die Qualität dieser Approximation hängt von der Wahl von k ab. Je größer k,desto besser ist die Approximation.

4.7.2 Numerische Anwendung

Numerischer Überlauf

Nicht alle Rekursionsvorschriften sind stabil,d.h der Rundungsfehler könnte nach einige Schritte so größe sein,dass Endergebniss keine Sinn macht.

Die Panjer Rekursionsformel ist für Poisson od. negative-Binomialvrteilte

Schadenzahl stabil, jedoch nicht für Binomialverteilung.

Numerischer Unterlauf

Wenn der Anfangswert einer Rekursive Berechnung so klein ist,dass dieser vom Computer als Null aufgefasst wird,so würde die Rekursionsvorshrift erst $g_1 = 0$ liefern,und dann $g_2 = 0$, usw .

Um dieses Problem zu vermeiden,kann man g_0 einen willkürliche Wert (ZB: g_0 =1) setzen,und rechnet rekursiv weiter. Diese willkürliche Wert kann durch geeignete Skalierung erhalten werden.(ZB: durch n fache Kalkulation mit $g_0^{1/n}$)

4.8 Approximative Berechnung der Gesamtschadenverteilung

4.8.1 Die Normal-Approximation

Wenn wir den Erwartungswert und die Varianz von S kennen, approximieren wir die Verteilung von S durch die Normalverteilung mit gleichen Erwartungswert und gleicher Varianz.

Bsp:

S hat eine zusammengesetze Poissonverteilung mit Poisson Parametern λ und der Höhe des individuellen Schadens,die Lognormalverteilung mit Erwartungswert 1 und Varianz 1.5 ist. Wir suchen den Wert x mit Pr(S$\le$x)=0.95

Beh: (a) x=18.23wenn λ =10

(b) x=126.0 wenn λ =100

Bew:

$E[S] = \lambda$ und $Var[S] = 2.5\lambda$,dann die approximierte Verteilung von S ist N (λ ,2.5λ).

Dadurch, $\Pr(S \le x) \approx \Pr\left(Z \le \frac{x-\lambda}{\sqrt{2.5\lambda}}\right)$ wobei $Z \sim N$ (0,1).

Mit Hilfe die Tabelle von standard Normalverteilung wissen wir Pr(Z$\le$1.645)=0.95

$\Rightarrow \quad x = \lambda + 1.645\sqrt{2.5\lambda}$

$\Rightarrow$ λ =10, x=18.23 und λ =100, x=126.0

Vorteile:

-wenig Informationen
-einfache Anwendung
-angemessene Annäherung wenn die Schadenzahl sehr groß ist

Nachteile:

- Pr(S<0) >0
-die Approximationsverteilung ist symmetrisch, hingegen ist die echte Verteilung normalerweise verzerrt .
-die Approximation neigt dazu den tail zu unterschätzen.

4.8.2 Die verschobene Gamma- Approximation

Eine Schwäche von Normal-Approximation ist,dass sie auf den ersten zwei Momenten von S basiert. Die verschobene Gamma-Approximation bewältigt diesen Nachteil, indem sie auf den ersten drei Momenten von S basiert.

Die Verteilung von S wird durch die Verteilung von Y+k approximert,wobei Y~ $\gamma(\alpha,\beta)$ und k konstant ist.

Die parameters α , β und k werden durch folgende Gleichungen bestimmt.

$$Sk[S] = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \qquad (4.33)$$

$$V[S] = \frac{\alpha}{\beta^2} \qquad (4.34)$$

$$E[S] = \frac{\alpha}{\beta} + k \qquad (4.35)$$

Bsp: die Variable S hat gleiche Voraussetzung wie obige Beispiel,nun verwendet man die verschobene Gamma-Approximation und bestimmt x.

Beh: (a) x=19.59 wenn λ =10

(b) x=127.7 wenn λ =100

Bew;

1. Schritt: Zuerst bestimmen wir drei Moment von Lognormalverteilung

$$\Rightarrow \quad m_1 = 1 = \exp\left\{\mu + \sigma^2/2\right\}, m_2 = 2.5 = \exp\left\{2\mu + 2\sigma^2\right\}$$

s.d $\mu = -0.4581$ und $\sigma = 0.9572$ folgt $m_3 = \exp\left\{3\mu + 9\sigma^2/2\right\} = 15.625$

nach (4.33) gilt : $\quad \dfrac{\lambda m_3}{(\lambda m_2)^{3/2}} = \dfrac{2}{\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{4\lambda m_2^3}{m_3^2}$

nach (4.34) gilt : $\quad \lambda m_2 = \dfrac{\alpha}{\beta^2} \Leftrightarrow \beta = \dfrac{2m_2}{m_3}$

nach (4.35) gilt : $\quad \lambda m_1 = \dfrac{\alpha}{\beta} + k$ s.d $k = \lambda m_1 - \alpha/\beta = \lambda\left(m_1 - \dfrac{2m_2^2}{m_3}\right)$

Wenn λ =10, α =2.560, β =0.3200 und k=2.000, setzen S=Y+k, $Y \sim \gamma(\alpha, \beta)$ und

erhalten wir $\Pr(S \le x) \approx \Pr(Y \le x - k)$,dann kann man durch eine Software (ZB: spreadsheets) die inverse von Gammaverteilung berechnen.

$\Rightarrow$ $\Pr(Y \le 17.59) = 0.95$ folgt x=19.59

Wenn λ =100, α =25.60, β =0.3200 und k=20.00,dann $\Pr(Y \le 107.7) = 0.95$

$\Rightarrow$ x=127.7

Vorteile:

-beachtet die Verzerrung von die Verteilung von S.

-einfach zu implementierende Annäherung

-hervorragende Approximation.

Nachteile:

-mehr Information als Normal-Approximation.

-Pr(S<0) $\neq$ 0