Musterlösungen zur Probeklausur

Aufgabe 1.

$X_i \sim N(0,1)$, $i = 1, 2, 3$.
Es gilt

$$\mathbb{P}[\max\{X_1, X_2\} \leq X_3] = \mathbb{P}\Big[X_1 \leq X_3, X_2 \leq X_3\Big] = \mathbb{P}\Big[X_1 - X_3 \leq 0, X_2 - X_3 \leq 0\Big].$$

Betrachte den Zufallsvektor (X_1, X_2, X_3). X_1, X_2, X_3 sind unabhängig und nach dem Satz 2.25 lässt sich ihre gemeinsame Dichte $f(x_1, x_2, x_3)$ als

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)/2}$$

schreiben. Betrachte weiter die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_3, x_2 - x_3, x_3)$. Die Umkehrfunktion u von h ist dann gegeben durch $u(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + y_3, y_2 + y_3, y_3)$
Es gilt weiter:

$$J(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die gemeinsame Dichte von $X_1 - X_3$, $X_2 - X_3$ und X_3 ist dann gegeben durch

$$g(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-((y_1+y_3)^2+(y_2+y_3)^2+y_3^2)/2}.$$

Und wir haben mit $\Phi(x)$ als Verteilungsfunktion der Standard Normalverteilung:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[X_1 - X_3 \leq 0, X_2 - X_3 \leq 0] \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} e^{-((y_1+y_3)^2+(y_2+y_3)^2+y_3^2)/2} \, \mathrm{d}y_1 \, \mathrm{d}y_2 \, \mathrm{d}y_3 \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y_3)^2 e^{-y_3^2/2} \, \mathrm{d}y_3 \\
&= \mathbb{E}[\Phi(X_3)^2].
\end{aligned}$$

Nach Aufgabe 2.1 Blatt 8 ist $\Phi(X_3)$ gleichverteilt auf $[0, 1]$. Damit ergibt sich: $\mathbb{E}[\Phi(X_3)^2] = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 2.

Es ist bekannt, dass für eine $B(n,p)$-verteilte Zufallsvariable X gilt: $\mathbb{E}[X] = n \cdot p$ und $\mathrm{Var}[X] = n \cdot p \cdot (1-p)$.
Somit erhält man sofort $(1-p) = 4,75/5 = 0,95$. Daraus folgt dann $p = 0,05$ und $n = 5/0,05 = 100$.
Ferner gilt

$$\mathbb{P}[X \geq 99] = \mathbb{P}[X = 99] + \mathbb{P}[X = 100] = \binom{100}{99} 0,05^{99} 0,95 + \binom{100}{100} 0,05^{100} .$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned} K &= 20^{100} \cdot \binom{100}{99} \cdot 0,05^{99} \cdot 0,95 + 20^{100} \cdot \binom{100}{100} \cdot 0,05^{100} + 2 \\ &= 100 \cdot 20 \cdot 0,95 + 1 + 2 = 1903 . \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

Siehe Aufgabe 1.
Versucht diese Aufgabe selbstständig zu lösen. Wir besprechen die Lösung in der Sonderübung.

Aufgabe 4.

Wähle $\Omega = \Big\{(\omega_1, ..., \omega_N) : \omega_i \in \{\text{Kopf, Zahl}\}\Big\}$. Wobei $\mathbb{P}[\text{Zahl}] = \frac{1}{2} = \mathbb{P}[\text{Kopf}]$.
Dann ist es klar, dass Ω 2^N Elemente enthält. Es können folgende Ereignisse auftreten:

1. Kopf kommt bei N Würfen nicht vor: Der Verlust=-Gewinn ist dann
$$c + 2c + 4c + \cdots + 2^{N-1}c = c \sum_{i=0}^{N-1} 2^i .$$
2. Kopf tritt zum ersten Mal beim $k+1$-ten Wurf, $k \in \{1, ..., N-1\}$, auf:
Der Verlust in den k Würfen davor ist:
$$c + 2c + \cdots + 2^{k-1}c = c \sum_{i=1}^{k} = c(2^{k+1} - 1) ,$$
Der Einsatz beim $k+1$ Wurf ist dann 2^k .
Der Gewinn nach dem $k+1$ Wurf ist dann $2c \cdot 2^k - c(2^{k+1} - 1) = c$.
3. Kopf beim ersten Wurf. Gewinn $= c$.

D.h. G kann nur zwei Werte annehmen: c und $-c\sum_{i=0}^{N-1} 2^i$.
Sei nun $\omega \in \Omega$, dann gilt:

$$G(\omega) = \begin{cases} -\sum_{i=0}^{N-1} 2^i \cdot c = -c \cdot \frac{2^N-1}{2-1} = -c(2^N-1) & : \quad \omega = (\text{Zahl,...,Zahl}) \\ c & : \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Betrachte nun die einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}[G(\omega) = -c(2^N-1)] = 2^{-N},$$

da $\mathbb{P}[G(\omega) = -c(2^N-1)] =$ Wahrscheinlilchkeit N-mal Zahl hintereinander.
Für $\mathbb{P}[G(\omega) = c]$ gilt

$$\mathbb{P}[G(\omega) = c] = 1 - \mathbb{P}[G(\omega) = -c(2^N-1)] = 1 - 2^{-N}$$

Damit können wir auch den Erwartungswert ausrechnen:

$$\mathbb{E}[G] = -c(2^N-1) \cdot 2^{-N} + (1-2^{-N}) \cdot c = 0.$$

Aufgabe 5.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X^2, X^2 - X) &= \mathbb{E}[X^4 - X^3] - \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X^2 - X] \\ &= \mathbb{E}[X^4] - \mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X^2]^2 - \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

Da $X \sim N(0,1)$ gilt $\mathbb{E}[X^2] = 1$ und $\mathbb{E}[X] = 0$. Bleibt nur $\mathbb{E}[X^4]$ und $\mathbb{E}[X^3]$ auszurechnen.
Mit den Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 e^{-x^2/2}) &= 2xe^{-x^2/2} - x^3 e^{-x^2/2} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 e^{-x^2/2}) &= 3x^2 e^{-x^2/2} - x^4 e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

bekommt man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^4] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 e^{-x^2/2})\,\mathrm{d}x}_{=0} \\ &= 3\mathbb{E}[X^2] = 3, \\ \mathbb{E}[X^3] &= \int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 e^{-x^2/2})\,\mathrm{d}x}_{=0} \\ &= 2\mathbb{E}[X] = 0 \end{aligned}$$

Insgesamt $\mathrm{Cov}(X^2, X^2 - X) = 3 - 1 = 2$.

Es gilt (Definition 2.23):

$$\mathrm{Cor}[X,Y] = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X] \cdot \mathrm{Var}[Y]}}\,.$$

Wir brauchen noch die Varianzen von X^2 und $X^2 - X$. Da $X \sim N(0,1)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X^2] &= \mathbb{E}[X^4] - \mathbb{E}[X^2]^2 = 3 - 1 = 2 \\ \mathrm{Var}[X^2 - X] &= \mathbb{E}[(X^2 - X)^2] - (\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X])^2 \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[X^4]}_{=3} - 2\,\underbrace{\mathbb{E}[X^3]}_{=0} + \underbrace{\mathbb{E}[X^2]}_{=1} - \underbrace{\mathbb{E}[X^2]^2}_{=1} = 3\,. \end{aligned}$$

Somit $\mathrm{Cor}[X,Y] = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Aufgabe 6.

Sei X die Ankunftszeit der ersten Person und Y die Ankunftszeit der zweiten Person. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[|X - Y| \leq \frac{1}{4}]$.
Betrachte zunächst die Zufallsvariable $X - Y$. Es gilt $x \sim N(0, \frac{1}{12})$; und $-Y \sim N(0, \frac{1}{6})$ denn:

$$\mathbb{P}[-Y \leq y] = \mathbb{P}[Y \geq -y] = 1 - \mathbb{P}[Y \leq -y] = 1 - \Phi(-y) = 1 - 1 + \Phi(y) = \Phi(y)\,.$$

Da X und Y unabhängig sind, sind auch X und $-Y$ unabhängig. Nach Hilfssatz 2.26 hat man $X - Y \sim N(0, \frac{1}{4})$, d.h. $2(X - Y) \sim N(0,1)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|X - Y| \leq \frac{1}{4}] &= \mathbb{P}[-\frac{1}{4} \leq X - Y \leq \frac{1}{4}] = \mathbb{P}[X - Y \leq \frac{1}{4}] - \mathbb{P}[X - Y \leq -\frac{1}{4}] \\ &= \mathbb{P}[2(X - Y) \leq \frac{1}{2}] - \mathbb{P}[2(X - Y) \leq -\frac{1}{2}] = \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{1}{2}) \\ &= 0,6915 - 0,3085 = 0,383\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 7.

Behauptung: $X + Y$ und $2X$ sind nicht zwingend identisch verteilt.
Gegenbeispiel:

Wähle X, Y unabhängig und $N(0,1)$-verteilt. Dann ist $X + Y$ $N(0,2)$-verteilt. Denn nach Hilfssatz 2.26 der Vorlesung gilt für die Dichte $g(z)$ der

Zufallsvariablen $X+Y$:

$$\begin{aligned}
g(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} e^{(z-x)^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} e^{-x^2/2} e^{-x\cdot z} e^{-z^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{-z^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} e^{-x\cdot z}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{-z^2/2} e^{z^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} e^{-x\cdot z} e^{-z^2/4}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{*}{=} \frac{e^{-z^2/4}}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} e^{-y\cdot z/\sqrt{2}} e^{-z^2/4}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{e^{-z^2/4}}{\sqrt{4\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(y-z/\sqrt{2})^2/2}\,\mathrm{d}y}_{=1} \\
&= \frac{e^{-z^2/4}}{\sqrt{4\pi}}\,.
\end{aligned}$$

Dies ist die Dichte der $N(0,2)$-Verteilung.
$*$: Substitution $x = y/\sqrt{2}$.

Für $2X$ gilt:

$$\mathbb{P}[2X \leq x] = \mathbb{P}[X \leq \frac{x}{2}] = \Phi(\frac{x}{2})\,.$$

Die Dichte ist dann gegeben durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(\frac{x}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2} e^{-x^2/8}$. Das ist die Dichte der $N(0,4)$-Verteilung.