Seminar Zinsratenmodelle

Prof. Dr. Hanspeter Schmidli/ Dipl. Math. Julia Eisenberg

Marktmodelle

Thorsten Axer, 09. Januar 2007

Marktzinssätze

LIBOR, Forward LIBOR

LIBOR definiert einen jährlichen, einfachen Zinssatz, welcher am Ende einer definierten Periode ausgezahlt wird. Speziell bezeichnet der τ-LIBOR $L(T,T,T+\tau)$, dass ein Investment von 1 zur Zeit T anwachsen wird zu $1+\tau L(T,T,T+\tau)$ zur Zeit $T+\tau$.
Der *forward LIBOR* Satz ist definiert als

$$L(t,T,T+\tau) = \frac{1}{\tau}\left[\frac{P(t,T)}{P(t,T+\tau)} - 1\right],$$

wobei $P(t,T)$ der Preis eines Zerobonds zur Zeit t mit Fälligkeit in T ist.
Das bedeutet, dass wir einen Vertrag zur Zeit t abschließen können, so dass wir 1 zur Zeit T bezahlen und $1+\tau L(t,T,T+\tau)$ zur Zeit $T+\tau$ zurückerhalten. Die Zinsperiode τ wird als *Tenor* bezeichnet.

Swap, Forward Swap

Bei einem *Swapvertrag* sind $T_1, T_2, \ldots, T_M$ Swapzahlungszeitpunkte, wobei $T_k = T_0 + k\tau$ für $k = 1, \ldots, M$. Der Vertrag besagt, dass wir einen fixen Satz von τK_τ zur Zeit T_k bezahlen und als Gegenleistung den schwankenden τ-LIBOR $\tau L(T_{k-1}, T_{k-1}, T_k)$ erhalten. Zur Zeit T_0, wenn der Vertrag abgeschlossen wird, ist der Marktswapsatz K_τ so, dass der Wert der Gleichung Null ist.

$$K_\tau(T_0,T_0,T_M) = \frac{1-P(T_0,T_M)}{\tau\sum_{k=1}^{M} P(T_0,T_k)}.$$

Ein Vertrag, welcher zu einem früheren Zeitpunkt t abgeschlossen wird, aber welcher die gleichen Zahlungszeitpunkte $T_1, \ldots, T_M$ hat, wird *forward Swapvertrag* genannt. Der faire Swapsatz ist gegeben durch

$$K_\tau(t,T_0,T_M) = \frac{P(t,T_0)-P(t,T_M)}{\tau\sum_{k=1}^{M} P(t,T_k)}.$$

Die Vertragspartei, die die festen Sätze bezahlt, nennt man *the payer*, und die Vertragspartei, welche die schwankenden Sätze bezahlt, *the receiver*.

Lemma 1. Sei $\log X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für jedes $x > 0$, dass

$$E[(X-x)_+] = E(X)\Phi(d_1) - x\Phi(d_2),$$

wobei $d_1 = (\mu + \sigma^2 - \log x)/\sigma$ und $d_2 = d_1 - \sigma$.

Lemma 2. Sei $X(t)$ der Preis für eine handelbare Anlage, mit $X(t)$ strikt positiv und sei $X(t)$ der Zinsfaktor. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Martingalmaß P_X äquivalent zu dem risikoneutralen Maß Q, unter welchem die Preise von allen handelbaren Anlagen diskontiert mit $X(t)$ Martingale sind.
Ist $V(S)$ zusätzlich eine Auszahlung des Derivats zur Zeit S, dann ist der Wert dieses Derivats zu einer früheren Zeit t gegeben durch

$$V(t) = X(t)E_{P_X}\left[\frac{V(S)}{X(S)}|\mathcal{F}_t\right].$$

LIBOR Marktmodelle: Brace, Gatarek und Musiela

Ab jetzt werden wir uns auf einen Ausübungszeitpunkt (Verfallszeitpunkt) T und einen Tenor τ konzentrieren. Wir schreiben $L(t) \equiv L(t, T, T+\tau)$.
Für unser Modell ist es erforderlich, dass $L(t)$ immer strikt positiv bleibt. Sei

$$dL(t) = L(t)(\mu(t)dt + \nu(t)'d\tilde{W}(t)),$$

wobei $\tilde{W}(t)$ ist eine M-dimensionale Brown'sche Bewegung unter $Q, \mu(t)$ ein passender voraussehbarer Prozess, und $\nu(t) \equiv \nu(t, T, T+\tau)$ eine feste Funktion, mit $\nu(t) \equiv 0$ für $T \leq t \leq T+\tau$. Aus

$$\begin{aligned} L(t) &= \frac{1}{\tau}\left[\frac{P(t,T)}{P(t,T+\tau)} - 1\right] \\ \Rightarrow L(t)P(t,T+\tau) &= \frac{1}{\tau}[P(t,T) - P(t,T+\tau)]. \end{aligned}$$

Damit kann $V(t) = L(t)P(t, T+\tau)$ als handelbarer Vermögenswert gesehen werden. Schreiben wir weiter $X(t) = P(t, T+\tau)$, dann folgt $L(t) = V(t)/X(t)$ und damit eine Form, um Lemma 2 zu nutzen. Es existiert ein Maß P_X, unter welchem $V(t)/X(t) = L(t)$ ein Martingal ist. Wenn wir weiter annehmen, dass $L(t)$ strikt positiv bleibt, dann können wir schreiben

$$dL(t) = L(t)\nu(t)'d\hat{W}(t),$$

wobei $\hat{W}$ eine M-dimensionale Brown'sche Bewegung unter $P_{T+\tau}$. Da $\nu(t)$ eine feste Funktion ist, folgt, dass $L(T)$ lognormal ist unter $P_{T+\tau}$ mit

$$\begin{aligned} Var_{P_{T+\tau}}[\log L(T)|\mathcal{F}_t] &= \int_t^T \nu(s)'\nu(s)ds = \int_t^T |\nu(s)|^2 ds, \\ E_{P_{T+\tau}}[\log L(T)|\mathcal{F}_t] &= \log L(t) - \frac{1}{2}\int_t^T |\nu(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Caplet

Ein *Caplet* zahlt $V(T+\tau) = (L(T) - c)_+$ zur Zeit $T+\tau$. Für $T \leq t \leq T+\tau$ haben wir $V(t) = P(t, T+\tau)(L(T) - c)_+$. Unter Nutzung des Zinsfaktors $X(t) = P(t, T+\tau)$ erhalten wir für $t < T$ mit Lemma 2

$$\begin{aligned} V(t) &= P(t, T+\tau) E_{P_{T+\tau}} \left[\frac{V(T+\tau)}{P(T+\tau, T+\tau)} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T+\tau) E_{P_{T+\tau}} [(L(T) - c)_+ | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Mit Lemma 1 folgt für $t < T$

$$V(t) = P(t, T+\tau)[L(t)\Phi(d_1) - c\Phi(d_2)],$$

wobei

$$d_1 = \frac{\log(L(t)/c) + \frac{1}{2}\sigma_\nu^2}{\sigma_\nu}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_\nu, \quad \sigma_\nu^2 = \int_t^T |\nu(s)|^2 ds.$$

Cap

Ein *Cap* ist eine Zusammenfassung von Caplets, die $(L(T_{k-1}, T_{k-1}, T_k) - c)_+$ zur Zeit T_k für $k = 1, \ldots, M$ zahlen. Der Wert dieses Cap ist

$$V(t) = \sum_{k=1}^{M} P(t, T_k)[L(t, T_{k-1}, T_k)\Phi(d_{1k}) - c\Phi(d_{2k})],$$

wobei

$$d_{1k} = \frac{\log(L(t, T_{k-1}, T_k)/c) + \frac{1}{2}\sigma_{\nu k}^2}{\sigma_{\nu k}}, \quad d_{2k} = d_{1k} - \sigma_{\nu k}, \quad \sigma_{\nu k}^2 = \int_t^{T_{k-1}} |\nu(s, T_{k-1}, T_k)|^2 ds.$$

Swaption

Wir betrachten eine *Payerswaption*, die zum Zeitpunkt T_0 mit dem Ausübungsswapsatz K ausläuft. Dies befähigt den Halter der Option, in einen Swapvertrag mit dem Satz K einzutreten, mit Nettozahlungen von $\tau(L(T_{k-1}, T_{k-1}, T_k) - K)$ zu Zeiten T_k für $k = 1, \ldots, M$. Dies kann dargestellt werden mit einem Wert zum Zeitpunkt T_0

$$V(T_0) = \tau(K_\tau(T_0, T_0, T_M) - K)_+ \sum_{k=1}^{M} P(T_0, T_k).$$

Sei A das Ereignis, an dem die Swaption ausgeübt wird und I_A die zugehörige Indikatorfunktion. Definiere $c_k = K\tau$ für $k = 1, \ldots, M-1$ und $c_M = 1 + K\tau$.

Für $t \leq T_0$ ist damit $C(t) = \sum_{k=1}^{M} c_k P(t, T_k)$ der Preis für einen Kuponbond, welcher einen Kupon von $K\tau$ zu den Zeitpunkten $T_1, \dots, T_M$ bezahlt.

$$V(T_0) = (1 - C(T_0))_+ = (1 - C(T_0))I_A.$$

Zu Zeiten $t < T_0$ haben wir

$$\begin{aligned} V(t) &= E_Q\left[1 \frac{B(t)}{B(T_0)} I_A | F_t\right] - E_Q\left[\sum_{k=1}^{M} c_k \frac{B(t)}{B(T_k)} I_A | \mathcal{F}_t\right] \\ &= P(t, T_0) E_{P_{T_0}}[I_A | F_t] - \sum_{k=1}^{M} c_k P(t, T_k) E_{P_{T_k}}[I_A | \mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

wobei $B(t)$ der gewöhnliche Zahlungsstand zum Zeitpunkt t ist.

Swap Marktmodelle: Jamshidian, Musiela und Rutkowski

Für die Bewertung der Swaption nutzen wir nun den Zinsfaktor

$$X(t) = \tau \sum_{k=1}^{M} P(t, T_k),$$

mit einem verbundenen Forwardmaß P_X. Unter P_X sind die Preise aller handelbaren Vermögenswerte mit $X(t)$ abgezinst Martingale. Nun entspricht der Forwardswapsatz $K_\tau(t, T_0, T_M)$ gerade $(P(t, T_0) - P(t, T_M))/X(t)$ und $(P(t, T_0) - P(t, T_M))$ entspricht dem Wert des handelbaren Vermögenswerts. Es folgt, dass $K_\tau(t, T_0, T_M)$ ein Martingal unter P_X ist.
$K(t) = K_\tau(t, T_0, T_M)$. Sei $dK(t) = K(t)\gamma(t)dW_X(t)$, wobei $W_X(t)$ eine Brown'sche Bewegung unter P_X und $\gamma(t)$ eine feste Funktion ist.
Der Wert $V(t)$ der Swaption zur Zeit t mit Verfallszeitpunkt T_0 und Ausübungsrate K ist

$$V(t) = \left(\tau \sum_{k=1}^{M} P(t, T_k)\right) [K(t)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)],$$

wobei

$$d_1 = \frac{\log(K(t)/K) + \frac{1}{2}S_K^2}{S_K}, \quad d_2 = d_1 - S_K, \quad S_K^2 = \int_t^{T_0} |\gamma(s)|^2 ds.$$

Literatur

Andrew J. G. Cairns (2004). Interest Rate Models: An Introduction.
Princeton University Press, Princeton.
Peter Albrecht/ Raimond Maurer (2005). Investment- und Risikomanagement:
Modelle, Methoden, Anwendungen. Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart.