Mehrfaktor Modelle

Philipp Immenkötter

5. Dezember 2006

1 Einleitung

Historische Daten belegen, dass Spot Rates mit unterschiedlicher Laufzeit nicht perfekt miteinander korroliert sind. Deswegen werden mehrere Quellen als Einfluss für die Zufälligkeit benötigt. Im Folgenden werden verschiedenen mehrfaktor Modelle vorgestellt.

2 Affine Modelle

Definition Ein Diffusions Modell heißt *affin*, falls der Preis eines Zerobonds folgende Darstellung besitzt:

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \exp\left(A(t,T) + \sum_{j=1}^{n} B_j(t,T) X_j\right) \\ &= \exp\left[A(t,T) + B(t,T)' X(t)\right] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} B(t,T) &= (B_1(t,T), \ldots, B_n(t,T))' \\ X(t,T) &= (X_1(t), \ldots, X_n(t.T)). \end{aligned}$$

Ein Modell ist *zeithomogen*, falls X(t) stationär ist und $A(t,T)$ und $B(t,T)$ nur von $T-t$ abhängen.

Satz 1 (Duffie & Kan 1996) Es sei $P(t, t+\tau) = \exp[A(\tau) + B(\tau)' X(t)]$, so muss $X(t)$ die folgenden SDGL erfüllen

$$dX(t) = (\alpha + \beta X(t))dt + SD(X(t))d\tilde{W}(t)$$

mit festem $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$, $\beta = (\beta_{ij})_{i,j=1}^n$, $S = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^n$, und schließlich

$$D(X(t)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\gamma_1' X(t) + \delta_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma_2' X(t) + \delta_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{\gamma_n' X(t) + \delta_n} \end{pmatrix},$$

mit $\delta_1, \dots, \delta_n$ und $\gamma_i = (\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{in})$ konstant, und $\tilde{W}(t)$ n-dimensionale Brownsche Bewegung unter Q.

2.1 Gaußsche mehrfaktor Modelle

Alle zeithomogenen Gaußschen Modelle basieren auf folgendem Ansatz. Sei $X(t) = (X_1(t), \dots,\ X_n(t)))'$ ein Diffusions Modell mit der SDGL

$$dX(t) = BX(t)dt + Kd\tilde{W}(t),$$

mit K und B reelle $n \times n$ Matrizen und $\tilde{W}(t)$ ist standart B.B. unter Q. Für den risikolosen Zinssatz gelte

$$r(t) = \mu + \theta' X(t)$$

mit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)'$ konstant. Sei die Spektralzerlegung von $B = B_R \Lambda B_L$, so hat $X(t)$ folgende Form

$$X(t) = e^{Bt} X(0) + \int_0^t e^{B(t-u)} K d\tilde{W}(t).$$

Es gilt mit $R(T) = \int_0^T r(t)dt = \mu T + \int_0^T \theta' X(t)dt$

$$E_Q[R(T)] = \mu T + \theta' B_R \Lambda^{-1}(e^{\Lambda T} - I) B_L X(0)$$

und

$$Var_Q[R(T)] = \int_0^T \theta' B_R \Lambda^{-1}(e^{\Lambda t} - I) B_L K K' B_L' (e^{\Lambda t} - I) \Lambda^{-1} B_R' \theta dt.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} P(t,T) &= E_Q[\exp(-R(t,T)) \mid X(0)] \\ &= \exp(-E_Q[R(t,T) \mid X(0)] + \frac{1}{2} Var_Q[R(T) \mid X(0)]). \end{aligned}$$

Beispiel: (Beaglehole & Tenney 1991)

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= -\alpha_1 X_2(t)dt + \sigma_{11} d\tilde{W}_1(t) \\ dX_2(t) &= -\alpha_2 X_1(t)dt + \sigma_{21} d\tilde{W}_1(t) + \sigma_{22} d\tilde{W}_2(t). \end{aligned}$$

wobei $r(t) = (X_1(t) + \mu_1) + (X_2(t) + \mu_2)$. $(X_1(t) + \mu_1)$ die momentane Preisinflation, und $(X_2(t) + \mu_2)$ die momentane Zinsrate angibt.

2.2 Verallgemeinerte Cox-Ingersoll-Ross Modelle, Duffie 1996

Setze in der Darstellung der SDGL in Satz 1 $\delta_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$. Somit gilt

$$dX_i(t) = \alpha_i(\mu_i - X_i(t))dt + \sigma_i \sqrt{X_i(t)} d\tilde{W}_i$$

mit $\tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_n$ i.i.d. std. Brownsche Bewegungen unter Q. Somit sind die $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ unabhängig. Definiere nun den risikolosen Zinssatz als

$$r(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t).$$

Wegen der Unabhängigkeit der X_i gilt

$$\begin{aligned} P(t,T) &= E_Q\left[\exp\left(\int_t^T r(u)du\right) \Big| F_t\right] \\ &= \exp\left[\sum_{i=1}^{n} A_i(T-t) - \sum_{i=1}^{n} B_i(T-t)X_i(t)\right], \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} A_i(\tau) &= \frac{2\alpha_i\mu_i}{\sigma_i^2} \log\left(\frac{2\gamma_i e^{(\gamma_i+\alpha_i)\tau/2}}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i}\right), \\ B_i(\tau) &= \frac{2(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)}{(\gamma_i+\alpha_i)(\mathrm{e}^{\gamma_i\tau}-1)+2\gamma_i}, \\ \gamma_i &= \sqrt{\alpha_i^2 + 2\sigma_i^2}. \end{aligned}$$

vgl. Theorem 2, stetige Zinsratenmodelle II

Beispiel

$$\begin{aligned} dX_1 &= (0.0225 - X_1(t))dt + 0.15\sqrt{X_1(t)}d\tilde{W}_1(t) \\ dX_2 &= 0.05(0.072 - X_2(t))dt + 0.06\sqrt{X_2(t)}d\tilde{W}_2(t) \end{aligned}$$

Also $n = 2$, $\alpha_2 \ll \alpha_1$ und $\sigma_2 \ll \sigma_1$. Somit hat $X_2(t9$ kurzfristig wenig Einfluß auf den Verlauf von $r(t)$, bestimmt aber lang anhaltende Hochs und Tiefs. $X_1(t)$ hingegen bestimmt kurzfristige Schwankungen.

2.3 Das Longstaff & Schwartz Modell, 1992

Wähle den CIR Ansatz, also

$$dY_i(t) = \alpha_i(\mu_i - Y_i(t))dt + \sigma_i \sqrt{Y_i(t)} d\tilde{W}_i$$

mit $i = 1,2$ und $\tilde{W_1}$ und $\tilde{W_2}$ unabhängig. Seien $c_1, c_2 > 0$ und definiere nun

$$\begin{aligned} r(t) &= c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) \\ V(t) &= c_1^2 Y_1(t) + c_2^2 Y_2(t) \end{aligned}$$

So gilt

$$\begin{aligned} dr(t) &= c_1 dY_1(t) + c_2 dY_2(t) \\ &= \eta(r(t), V(t))dt + \sqrt{\frac{c_1(c_2 r(t) - V(t))}{c_2 - c_1}} d\tilde{W}_1(t) + \sqrt{\frac{c_2(V(t) - c_1 r(t))}{c_2 - c_1}} d\tilde{W}_2(t) \end{aligned}$$

wobei

$$\eta(r(t), V(t)) = \left(\alpha_1 c_1 \mu_1 + \alpha_2 c_2 \mu_2 - \frac{(\alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1) r(t) + (\alpha_2 - \alpha_1) V(t)}{c_2 - c_1} \right)$$

$V(t)dt$ gibt die momentane Variation von $r(t)$ an, also $d < r(t) >= V(t)dt$. Zudem muss gelten $V(t) \in (c_1 r(t), c_2 r(t))$.

2.4 Weitere Affine Modelle

- James & Webber (2000), weder Gaußsch, noch CIR
- Bolder (2001), weder Gaußsch, noch CIR
- Dai & Singleton (2000), dreifaktorige affine Modelle, square root process, also $\gamma_i \neq 0$ in Satz 1

3 Consols Modelle

In Consols Modellen wird sowohl der kurzfristige Zins $r(t)$, als auch der langfristige Zins $l(t)$ betrachtet. Es gilt für den Preis des entsprechenden Bonds

$$C(t) = \begin{cases} 1/l(t) & \text{falls} \quad l(t) > 0 \\ \infty & \text{falls} \quad l(t) \leq 0. \end{cases}$$

Zudem sollen $r(t)$ und $l(t)$ folgende SDGLn erfüllen

$$dr(t) = \mu_r(r,l)dt + \sigma_r(r,l)dW_r(t),$$

$$dl(t) = \mu_l(r,l)dt + \sigma_l(r,l)dW_l(t).$$

wobei $W_r(t)$ und $W_l(t)$ Brownsche Bewegungen unter P sind. Im Folgenden gelte $\mu_*(r(t), l(t)) \equiv \mu_*(r,l)$, $\sigma_*(r(t), l(t)) \equiv \sigma_*(r,l)$ und $\lambda_*(r(t), l(t)) \equiv \lambda_*(r,l)$. Das Modell sollte so formuiert werden, dass $l(t) > 0$ garantiert ist. Betrachte man nun $C(t)$ unter P so gilt nach Itô :

$$dC(t) = \left(-\frac{\mu_l(r,l)}{l^2(t)} + \frac{\sigma_l^2(r,l)}{l^3(t)} \right) dt - \frac{\sigma_l(r,l)}{l^2(t)} dW_l(t)$$

Um eine arbitragefreie Darstellung zu erhalten, muss man den Marktpreis des Risikos λ_l mit jeder Zufallsquelle in Verbindung bringen, dazu betrachen wir noch einmal $C(t)$

$$dC(t) = (C(t)r(t) - 1)\,dt - \frac{\sigma_l(r,l)}{l(t)} C(t) d\tilde{W}_l(t)$$

mit $d\tilde{W}_l(t) = dW_l(t) + \lambda_l(r,l)dt$. Somit gilt

$$\lambda_l(r,l) = \frac{\mu_l(r,l)) + r(t)l(t) - l^2(t)}{\sigma_l(r,t)} - \frac{\sigma_l(r,l)}{l(t)},$$

bzw.

$$\mu_l(r,l) = \lambda_l(r,l)\sigma_l(r,l) + l^2(t) - r(t)l(t) + \frac{\sigma_l^2(r,l)}{l(t)}.$$

3.1 Das Brennan & Schwartz Modell, 1979

Setze $\lambda_l(r,l) = \lambda_2$, $\sigma_r(r,l) = \sigma_1 r$, $\sigma_l(r,l) = \sigma_2 l$ und $\mu_r(r,l) = r\left[\alpha \log \frac{l}{pr} + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right]$ mit p konstant. Seien $W_1(t)$ und $W_2(t)$ unabhänginge Brownsche Bewegungen unter P. Setze $W_l(t) \equiv W_2(t)$ und $dW_r(t) = \sqrt{1-\rho^2} dW_1(t) + \rho dW_2(t)$. Außerdem setze $\sigma_{12} = \rho\sigma_1$, $\sigma_{11} = \sqrt{1-\rho^2}\sigma_1$, $\sigma_{21} = 0$ und $\sigma_{22} = \sigma_2$. So ergibt sich

$$\begin{aligned} dr(t) &= \tilde{\mu}_r(r,l)dt + \sigma_{11} r(t) d\tilde{W}_1(t) + \sigma_{12} r(t) d\tilde{W}_2(t) \\ dl(t) &= \tilde{\mu}_l(r,l)dt + \sigma_{22} l(t) d\tilde{W}_2(t) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_r(r,t) &= \mu_r(r,l) - \sigma_{11} r(t)\lambda_1(r,l) - \sigma_{12} r(t)\lambda_2 \\ \tilde{\mu}_l(r,t) &= l(t)(\sigma_{22}^2 + l(t) - r(t)). \end{aligned}$$

Bei diesem Modell besteht die Gefahr, dass $r(t)$ oder $l(t)$ in endlicher Zeit null werden können. Ebenso kann wegen des quadratischen Teils des Driftterms $\tilde{\mu}_l(r,t)$ $l(t)$ in endlicher Zeit ∞ werden.

Satz 2 (Hogan 1993) Es gelte unter Q

$$dC(t) = (r(t)C(t) - 1)dt - C^2(t)\sigma_l(r,l)d\tilde{W}_l(t),$$

und $r(t)$ genüge der SDGL

$$dr(t) = \tilde{\mu}_r(r,l)dt + \sigma_r(r,l)d\tilde{W}_r(t)$$

mit $d < W_r, W_l > (t) = \rho dt$, $-1 < \rho < 1$. Zudem seien $\sigma_r(r,l) = \eta_r(r)$ und $\sigma_l(r,l) = \eta_l(l)$, wobei η_r und η_l bestimmte Lipschitzbedingungen erfüllen (siehe Hogan 1993). Falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

- $\tilde{\mu}_r(r,l) = \alpha + \beta(l-r)$
- $\tilde{\mu}_r(r,l) = \alpha + \beta r(l-r)$, oder
- $\tilde{\mu}_r(r,l) = \alpha r + \beta r \log(l/r)$

so explodiert das Modell, d.h. $r(t)$ oder $l(t)$ erreichen f.s. ∞ in endlicher Zeit.

3.2 Das Rebonato Lognormal Modell

Definiere $k(t) = r(t)/l(t)$ und benutzte ein Lognormales Modell mit

$$\begin{aligned} dl(t) &= l(t)[m_2(k,l)dt + \sigma_2 d\tilde{W}_2(t)] \\ dk(t) &= k(t)[m_1(t,k,l)dt + \sigma_1 d\tilde{W}_1(t)] \end{aligned}$$

mit $\tilde{W}_1(t)$ und $\tilde{W}_2(t)$ u.a. Brownsche Bewegungen unter Q. Setze

$$m_2(k,l) = \sigma_2^2 + l(t) - r(t) = \sigma_2^2 + l(t)(1-k(t)),$$

so ergibt sich

$$dr(t) = r(t)[(\sigma_2^2 + (l(t) - r(t)) + m_1(t,k,l))dt + \sigma_1 d\tilde{W}_1(t) + \sigma_2 d\tilde{W}_2(t)].$$

Diesen Modell ist stabiler als das Brennan & Schwartz Modell, birgt jedoch Gefahr, da $k(t)$ längere Zeit im Intervall $(0,1)$ verbleiben kann, und so der Driftterm von $l(t)$ stehts positiv ist.

3.3 Weitere Consols Modelle

- Schaefer & Schwartz, 1984
- Rhee, 1999
- Duffie, Ma & Young, 1995

4 Heath-Jarrow-Morton mehrfaktor Modelle

Die einfaktor Version des Modells kann man direkt erweitern:

$$dP(t,T) = P(t,T)[r(t)dt + S(t,T)' d\tilde{W}(t)],$$

mit der vorhersagbaren Volatilitätsfunktion $S(t,T) = (S_1(t,T), \ldots, S_n(t,T))'$ und der n-dimensionalen Brownschen Bewegung $\tilde{W}(t)$ unter Q. Für die Forward Rates erhält man

$$df(t,T) = -\sigma(t,T)' S(t,T)dt + \sigma(t,T)' d\tilde{W}(t)$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma(t,T) &= (\sigma_1(t,T), \ldots, \sigma_n(t,T))', \\ \sigma_i(t,T) &= -\frac{\partial}{\partial T} S_i(t,T). \end{aligned}$$

5 Modelle mit quadratischer Termstruktur, Ahn, Dittmar & Gallant, 2002

Man betrachte die SDGL für einen n-dimensionalen Diffusionsprozess

$$dY(t) = (\mu + \xi Y(t))dt + \Sigma dW(t),$$

mit μ n-dimensionaler Vektor, ξ , Σ n×n Matrizen und $W(t)$ eine n-dim. Brownsche Bewegung unter P. Die risikolose Zinsrate definiert man nun als

$$r(t) = \alpha + \beta' Y(t) + Y(t)\psi Y(t),$$

mit $\alpha - \frac{1}{4}\beta'\psi\beta \geq 0$ damit $r(t) > 0$ f.s. gilt. Preise werden über einen state-price-density Prozess ermittelt, vlg Kapitel 8. So erhält man

$$P(t-T) = exp[A(T-t) + B(T-t)'Y(t) + Y(t)'C(T-t)Y(t)]$$

wobei $A(\tau)$ eine skalare Funktion, $B(\tau)$ n $\times$ 1, und $C(\tau)$ n $\times$ n.

6 Ausblick

Alle betrachteten Modelle benutzen das natürliche (die Welt abbildende) Wahrscheinlichkeits Maß P, oder das dazu äquivalente Martingalmaß Q . In den folgenden Kapiteln werden Modelle vorgestellt, die weder P noch Q benutzen.