No-Arbitrage Modelle

Stefan Fremdt

17. Januar 2007

1 Einleitung

No-Arbitrage Modelle:
Modelle, bei denen die beobachteten Preise der Anleihen und Derivate am Markt $P_{obs}(t,T)$ genau mit denen des Modells $\hat{P}(t,T)$ übereinstimmen, da sie schon zum Input des Modells gehören, wobei t den Zeitpunkt der Anpassung bezeichnet.

2 Markov Modelle

Markov Modell: Modell, das die folgenden zwei Voraussetzungen erfüllt:

- Die Preise $P_{obs}(t,T)$ gehören zum Input
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $P(s,T) \mid \mathcal{F}_t$ entspricht der von $P(s,T)|X(t)$, für $t < s < T$, wobei $X(t)$ ein endlich dimensionaler Itô-Prozess ist.
  D.h. zusätzliche Informationen über die Vergangenheit erhöhen nicht den Informationsgehalt der möglichen Aussagen über die zukünftige Entwicklung.

Im Folgenden werden zwei Modelle behandelt, bei denen der risikolose Zinssatz $r(t)$ anstelle von $X(t)$ zugrunde liegt:

2.1 Das Ho und Lee Modell

Das aus dem Jahr 1986 stammende Modell von Ho und Lee verwendet folgende Modellierung für den risikolosen Zinssatz:

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma d\widetilde{W}(t)$$

, wobei

$\widetilde{W}(t)$ eine Brownsche Bewegung unter dem äquivalenten Martingalmaß Q ist und $\theta(t)$ sich wie folgt ergibt:

Wir nehmen an, dass der Input aus den $P(0,T))$ besteht, für alle $T > 0$.
Sei

$$f(0,T) = -\frac{\partial}{\partial T} log P(0,T)$$

die zugrunde liegende Forward-Rate-Kurve.
Wenn man $\theta(T)$ als

$$\theta(T) = \frac{\partial}{\partial T} f(0,T) + \sigma^2 T$$

voraussetzt, kann man zeigen, dass

$$E_Q\left[exp\left(-\int_0^T r(t)dt\right)\middle| r(0)\right] = P(0,T)$$

und

$$P(t,T) = exp[A(t,T) - (T-t)r(t)]$$

, wobei

$$A(t,T) = log\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + (T-t)f(0,t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)^2.$$

Es folgt, dass

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} log P(t,T) = r(t) + f(0,T) - f(0,t) + \sigma^2 t(T-t).$$

Als Lösung für $r(t)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} r(t) &= r(0) + \int_0^t \theta(s)ds + \sigma\widetilde{W}(t) \\ &= r(0) + f(0,t) - f(0,0) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\widetilde{W}(t) \\ &= f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\widetilde{W}(t). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\widetilde{W}(t) + f(0,T) - f(0,t) + \sigma^2 t(T-t) \\ &= f(0,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 T^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)^2 + \sigma\widetilde{W}(t). \end{aligned}$$

Bemerkung: Das Ho und Lee Modell kann relativ einfach zu einer Version verallgemeinert werden, in der $\sigma(t)$ zwar zeitabhängig, jedoch deterministisch ist.

2.2 Das Hull und White Modell

Das 1990 von Hull und White veröffentlichte Modell ist eine Verallgemeinerung des Vasicek-Modells, die folgende Modellierung für den risikolosen Zinssatz verwendet:

$$dr(t) = \alpha(\mu(t) - r(t))dt + \sigma d\widetilde{W}(t),$$

wobei $\widetilde{W}(t)$ wiederum eine Brownsche Bewegung unter Q und $\mu(t)$ eine deterministische Funktion ist, die auch als Maßzahl für den (lokalen) Mean-Reversion-Effekt interpretiert werden kann.
Damit die zugrunde liegenden theoretischen und beobachtetenPreise übereinstimmen, wird vorausgesetzt, dass

$$\mu(t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}f(0,t) + f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - e^{-2\alpha t})$$

und

$$P(t,T) = exp[A(t,T) - B(t,T)r(t)],$$

wobei

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha},$$

und

$$A(t,T) = log\frac{P(0,T)}{P(0,t)} + B(t,T)f(0,t) - \frac{\sigma^2}{4\alpha^3}(1 - e^{-\alpha(T-t)})^2(1 - e^{-2\alpha t}).$$

Es folgt mit Hilfe der Eigenschaften des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses:

$$r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t})^2 + \sigma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}d\widetilde{W}(s)$$

Auch das Hull-White-Modell kann recht einfach zu einer Form verallgemeinert werden, in der $\alpha(t)$ und $\sigma(t)$ zwar zeitabhängig, jedoch deterministisch sind.

2.3 Das Black-Karasinski Modell

Das Black-Karasinski-Modell geht zunächst aus von $Y(t) = log\ r(t)$ mit der zugehörigen stochastischen Differentialgleichung (SDE)

$$dY(t) = \alpha(t)(log\ \mu(t) - Y(t))dt + \sigma(t)d\widetilde{W}(t),$$

wobei $\widetilde{W}(t)$ wiederum eine Standard-Brownsche Bewegung unter Q und $\alpha(t)$, $\mu(t)$ und $\sigma(t)$ zeitabhängige, deterministische Funktionen sind. Durch Anwendung der Itô-formel erhält man:

$$dr(t) = \alpha(t)r(t)\left[log\ \mu(t) + \frac{\sigma(t)^2}{2\alpha(t)} - log\ r(t)\right]dt + \sigma(t)r(t)d\widetilde{W}(t)$$

Sei nun

$$A(t) = \int_0^t \alpha(u)du.$$

Man kann nun zeigen, dass

$$Y(T) = e^{A(t)-A(T)}Y(t) + \int_t^T \alpha(u)e^{A(u)-A(T)} log\, \mu(u)du + \int_t^T \sigma(u)e^{A(u)-A(T)} d\widetilde{W}(u).$$

Da nun aber $\sigma(u) \cdot exp[A(u) - A(T)]$ deterministisch ist, folgt, dass $r(T)$ bei gegebenem $r(t)$ lognormal-verteilt ist und es gilt

$$E_Q[log\ r(T) \mid \mathcal{F}_t] = e^{A(t)-A(T)}Y(t) + \int_t^T \alpha(u)e^{A(u)-A(T)} log\ \mu(u)du$$

und

$$Var_Q[logr(T) \mid \mathcal{F}_t] = \int_t^T \sigma(u)^2 e^{2(A(u)-A(T))}du.$$

3 Das Heath-Jarrow-Morton Modell (HJM)

Das Modell von Heath, Jarrow und Morten liefert vielmehr einen Rahmen für speziellere No-Arbitrage-Modelle, als dass man es selbst als No-Arbitrage-Modell bezeichnen könnte.
Das HJM-Modell geht von den Werten der Forward-Rate-Kurve $f(0,T)$ als Inputdaten aus. Für feste Laufzeiten T liefert $f(t,T)$ einen Itô-Prozess mit SDE

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \quad \text{für alle} \quad T > t,$$

wobei $\alpha(t,T)$ und $\sigma(t,T)$ von $f(t,T)$ selbst, der gesamten Forward-Rate-Kurve oder sogar von $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W(s) : s \leq t\})$ abhängen können.

Voraussetzungen:

- Für alle T sind $\sigma(t,T)$ und $\alpha(t,T)$ vorhersehbar und hängen von der Vergangenheit von $W(s)$ bis zum Zeitpunkt t ab.
- $$\int_0^T \sigma^2(t,T)dt < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^T |\alpha(t,T)|dt < \infty \quad \text{f.s.}$$
- $$\int_0^T \int_0^u |\alpha(t,u)|dt\ du < \infty$$
- $f(0,T)$ ist deterministisch und erfüllt $\int_0^T |f(0,u)|du < \infty$

- $$E\left[\int_0^T \left|\int_0^u \sigma(t,u)dW(t)\right| du\right] < \infty$$

3.1 Die risikolose Anlage

Aus der SDE für $f(t,T)$ folgt:

$$r(T) = \lim_{t \to T-} f(t,T) = f(0,T) + \int_0^T \sigma(s,T)dW(s) + \int_0^T \alpha(s,T)ds$$

Der Bankkontoprozess $B(t)$ hat die SDE:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad B(t) &= B(0)exp\left[\int_0^t r(u)du\right] \\ &= B(0)exp\left[\int_0^t f(0,u)du + \int_0^t \int_s^t \alpha(s,u)du\ ds + \int_0^t \left(\int_s^t \sigma(s,u)du\right) dW(s)\right]. \end{aligned}$$

3.2 Handelbare Anlagen

Die Preisgebung der Zerobonds findet wie folgt statt:

$$\begin{aligned} P(t,T) &= exp\left[-\int_t^T f(t,u)du\right] \\ &= exp\left[-\int_t^T f(0,u)du - \int_0^t \int_t^T \alpha(s,u)du\ ds - \int_0^t \left(\int_t^T \sigma(s,u)du\right) dW(s)\right]. \end{aligned}$$

Der diskontierte Anlagen-Preis wird definiert durch:

$$Z(t,T) = \frac{P(t,T)}{B(t)} = exp\left[\int_0^t S(s,T)dW(s) - \int_t^T f(0,u)du - \int_0^t \int_s^T \alpha(s,u)du\ ds\right],$$

wobei $S(s,T) = -\int_s^T \sigma(s,u)du$.
Erneute Anwendung der Itô-Formel ergibt:

$$dZ(t,T) = Z(t,T)\left[\left(\frac{1}{2}S^2(t,T) - \int_t^T \alpha(t,u)du\right)dt + S(t,T)dW(t)\right].$$

Hierbei kann $S(t,T)$ als Volatilität von $P(t,T)$ interpretiert werden.

3.3 Maßwechsel

Um den diskontierten Anlagen-Preis in ein Martingal umzuwandeln, wird ein Maßwechsel durchgeführt, wobei der benötigte Drift-Term, also der Marktwert des Risikos, für eine Anleihe mit Laufzeit T gegeben ist durch:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}S(t,T) - \frac{1}{S(t,T)}\int_t^T \alpha(t,u)du$$

In Bezug auf das Girsanov-Theorem muss nun aber $\gamma(t)$ die Novikov-Bedingung erfüllen, damit ein ein äquivalentes Martingalmaß Q existiert, so dass

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \gamma(s)ds$$

eine Brownsche Bewegung unter Q ist.Unter Q gilt dann:

$$dZ(t,T) = Z(t,T)S(t,T)d\widetilde{W}(t)$$

Laut Voraussetzung ist aber nun $Z(t,T)$ ein Martingal unter Q.

Es folgt, dass

$$dP(t,T) = P(t,T)(r(t)dt + S(t,T)d\widetilde{W}(t)).$$

3.4 Duplikationsstrategien

X Zahlung eines Derivates bedingt über $\mathcal{F}_s$ zur Zeit S ($S < T$).
Ziel: Konstruktion einer Hedging-Strategie durch Bargeld und die T-Anleihe $P(t,T)$.

5 Konstruktionsschritte:

- Finden des äquivalenten Martingalmaßes Q, unter dem $Z(t,T)$ ein Martingal ist.
- Definieren des Q-Martingals $D(t) = E_Q[B(S)^{-1}X \mid \mathcal{F}_t]$.
- Finden des previsiblen Prozesses $\phi(t)$ so, dass $D(t) = D(0) + \int_0^t \phi(s)dZ(s,T)$.
- Definieren von $\psi(t) = D(t) - \phi(t)Z(t,T)$.
- Die Handelsstrategie $(\psi(t), \phi(t))$, wobei
  $\psi(t)$ die Anzahl der Einheiten $B(t)$ und
  $\phi(t)$ die Anzahl der Einheiten $P(t,T)$,
  ist eine selbstfinanzierende Duplikationsstrategie für X zur Zeit S.

3.5 Der arbitragefreie Markt

Sei nun $X = 1$, d.h. das Derivat ist ein Zerobond mit Laufzeit S

$$\Rightarrow P(t,S) = B(t)E_Q[B(S)^{-1} \mid \mathcal{F}_t] = E_Q\left[exp\left(-\int_t^S r(u)du\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

Für den diskontierten S-Bond gilt:

$$Z(t,S) = \frac{P(t,s)}{B(t)} = E_Q[B(S)^{-1} \mid \mathcal{F}_t]$$

Somit ist $Z(t,S)$ ein Q-Martingal. Dies gilt jedoch für alle Anleihen, woraus folgt, dass diese durch die gleiche Maßtransformation in Martingale überführt werden. Sie besitzen also auch alle den gleichen Marktpreis des Risikos

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}S(t,T) - \frac{1}{S(t,T)}\int_t^T \alpha(t,u)du$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_t^T \alpha(t,u)du = \frac{1}{2}S(t,T)^2 - \gamma(t)S(t,T).$$

Da $\frac{\partial}{\partial T}S(t,T) = -\sigma(t,T)$ ergibt Differentiation nach T

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)(\gamma(t) - S(t,T))$$

Hieraus folgt für das Ausgangsmodell:

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \\ &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)(d\widetilde{W}(t) - \gamma(t)dt) \\ &= -\sigma(t,T)S(t,T)dt + \sigma(t,T)d\widetilde{W}(t) \end{aligned}$$

und somit

$$r(t) = f(0,t) - \int_0^t \sigma(s,t)S(s,t)ds + \int_0^t \sigma(s,t)d\widetilde{W}(s).$$

4 Zusammenhang zwischen dem HJM und den Markov Modellen

4.1 Ho und Lee

Unter dem HJM erhält man für $\sigma(s,t) = \sigma \quad \forall\, s,t,$ also $S(s,t) = -(t-s)\sigma$

$$\Rightarrow \quad r(t) = f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma\widetilde{W}(t),$$

also den Ausdruck für $r(t)$ im Ho-Lee-Modell.

4.2 Hull und White

Ähnlich folgt mit $\sigma(s,t) = \sigma e^{-\alpha(t-s)}$, dass

$$S(s,t) = -\frac{\sigma}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-s)}),$$

woraus wiederum folgt

$$\begin{aligned} -\int_0^t \sigma(s,t)S(s,t)ds &= \frac{\sigma^2}{\alpha}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}(1 - e^{-\alpha(t-s)})ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t})^2. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t})^2 + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} d\widetilde{W}(s),$$

also den Ausdruck für $r(t)$ im Hull-White-Modell.

5 Fazit

Das Rahmen-Modell von Heath, Jarrow und Morton liefert also die Grundlage für die beschriebenen Markov-Modelle, sowohl das Ho-Lee-Modell als auch das Hull-White-Modell. Außerdem impliziert es Duplikationsstrategien für allgemeine Finanztitel und somit unter No-Arbitrage-Gesichtspunkten Preisgebungsmechanismen für diese.